Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2017

Oplossingen

5 april 2017

In dit document worden oplossingen voorgesteld voor de vragen van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2017. Het spreekt voor zich dat andere methodes eventueel ook tot correcte oplossingen kunnen leiden.

Vlaamse Sterrenkunde Olympiade
Vereniging Voor Sterrenkunde
Oostmeers 122c
8000 Brugge

Het organiserend comité van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2017: Jelle Dhaene (UGent), Ward Homan (KULeuven), Frank Tamsin (VVS), Sébastien Viaene (UGent) en Walter Van Rensbergen (VUB).

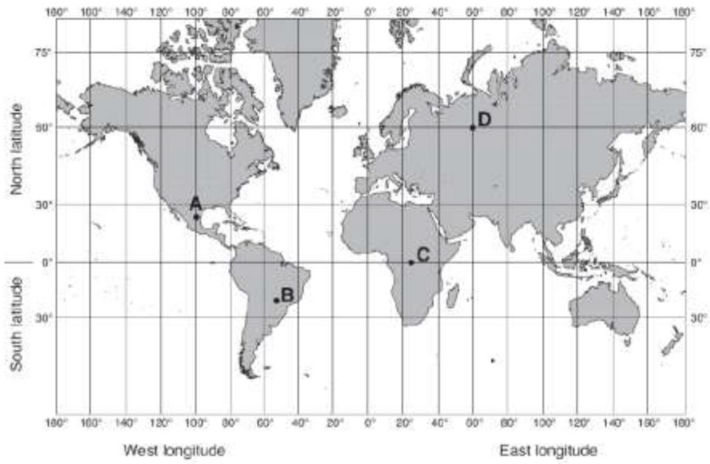
http://www.sterrenkundeolympiade.be
info@sterrenkundeolympiade.be

Meerkeuze vragenreeks

1. Het feit dat de ontsnappingssnelheid van de Maan kleiner is dan die van de Aarde is voornamelijk te wijten aan:
a) de afstand van de Maan tot de Aarde.
b) de kleinere massa (die bij de Maan 81 keer kleiner is dan bij de Aarde).
c) de kleinere straal (bij de Maan ongeveer 4 keer kleiner is dan bij de Aarde).
d) de hogere temperatuur op de Maan.
e) het feit dat de Maan afwisselend dichter bij en verder van de Zon staat dan de Aarde (door de maandelijkse beweging van de Maan rond de Aarde).

De ontsnappingssnelheid is de beginsnelheid die je, ter hoogte van het oppervlak van een hemellichaam, moet hebben om net oneindig ver weg ervan te kunnen vliegen zonder extra aandrijving en terug te vallen (in de veronderstelling dat er geen andere massa in het heelal is). De ontsnappingssnelheid v van een hemellichaam kan berekend worden aan de hand van de formule $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ waarbij M de massa van het hemellichaam voorstelt, R de straal van het hemellichaam is en G de universele gravitatieconstante ($G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$). Zowel massa als straal spelen dus een rol, maar een kleinere straal zou net tot een grotere ontsnappingssnelheid moeten leiden (want R staat in de noemer). De grotere massa van de Maan heeft dus duidelijk het overwicht.

2. Op welke plaats (weergegeven op de kaart rechts) kan de Poolster in de loop van een jaar nooit waargenomen worden?
a) Plaats A.
b) Plaats B.
c) Plaats C.
d) Plaats D.
e) geen enkele (i.e. de Poolster kan op elk van de plaatsen A, B, C en D wel eens waargenomen worden in de loop van het jaar).



Aangezien de Poolster zich ongeveer op de noordelijke hemelpool bevindt, kunnen we benaderend stellen dat de hoogte van de Poolster gelijk is aan de plaatselijke breedteligging. Voor plaatsen op het noordelijk halfrond heeft de hoogte van de Poolster dus een positieve waarde. Op de evenaar is de hoogte van de Poolster (benaderend) 0° en is ze dus nog net aan de horizon zichtbaar. Op het zuidelijk halfrond neemt de hoogte van de Poolster negatieve waarden aan. Bijgevolg is de Poolster daar niet meer zichtbaar.

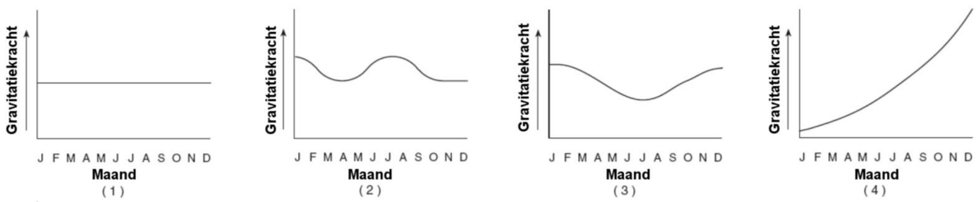
3. Met welk ander object in het zonnestelsel vertoont Venus de grootste gelijkenis op vlak van massa en dichtheid?
a) Jupiter.
b) Phobos.
c) Mars.
d) Deimos.
e) de Aarde.

De massa van Venus bedraagt $4{,}869 \cdot 10^{24}$ kg, die van de Aarde $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg en die van Mars $6{,}421 \cdot 10^{23}$ kg. De diameters van de drie planeten zijn respectievelijk 12104 km, 12756 km en 6794 km. De massa's en diameters van de marsmaantjes Phobos en Deimos zijn vele malen kleiner.

4. Zowel op de Maan als op Mercurius zijn er grote temperatuursverschillen tussen dag en nacht. De hoofdreden voor deze variatie is
a) het ontbreken van een atmosfeer.
b) de rotsachtige samenstelling.
c) de afstand tot de Zon.
d) de kleine massa.
e) geen van bovenstaande.

Een atmosfeer zorgt er onder andere voor dat de warmte overdag verspreid wordt en 's nachts vastgehouden wordt.

5. Welk van de hier afgebeelde grafieken geeft het best weer hoe de gravitatiekracht tussen de Aarde en de Zon verloopt tijdens de beweging van de Aarde rond de Zon gedurende het jaar?



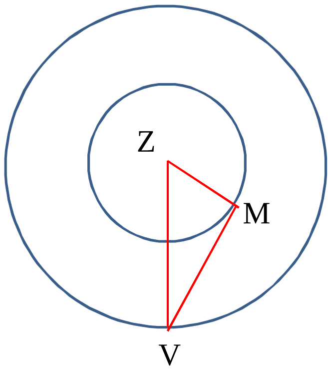
a) (1)
b) (2)
c) (3)
d) (4)
e) Geen enkele van deze grafieken geeft dit ook maar bij benadering weer.

De gravitatiekracht is afhankelijk van de massa's van Aarde en Zon en van hun onderlinge afstand. Alleen deze laatste varieert. De gravitatiekracht is het grootst wanneer de afstand het kleinst is (i.e. waarin de Aarde zich in het perihelium van haar baan bevindt) en deze situatie doet zich voor begin januari. Wanneer het zomer is op het noordelijk halfrond is de afstand tussen de Zon en de Aarde het grootst: de Aarde bereikt het aphelium van haar baan begin juli.

6. Uranus en Neptunus zien er blauw uit
a) omdat hun atmosferen blauw licht zeer efficiënt absorberen;
b) omdat ze beide een massa hebben die veel lager is dan normaal geacht wordt voor een gasplaneet;
c) omdat hun beider oppervlak bedekt is met water en hun wolkendek erg ijl is;
d) omdat hun atmosferen rood licht zeer efficiënt absorberen;
e) omdat er erg hoge windsnelheden heersen, wat een sterke blauwverschuiving veroorzaakt.

De blauwe kleur van Uranus en Neptunus wordt veroorzaakt door de atmosfeer, die 1,5% methaan bevat. Methaan heeft de eigenschap dat het rode kleuren, en in mindere mate ook gele kleuren, absorbeert en dus alleen de blauwe kleuren weerkaatst.

7. De lengte van de halve lange as van de baan van Mercurius bedraagt 0,387 astronomische eenheden. Bij Venus is dat 0,719 astronomische eenheden. Wat is de maximale elongatie (de hoekafstand tussen de Zon en de planeet) van Mercurius gezien vanaf Venus? Er mag verondersteld worden dat beide planeten een cirkelvormige baan beschrijven.
a) 15,5°.
b) 28,2°.
c) 32,6°.
d) 42,9°.
e) 57,4°.



De situatie is schematisch weergegeven op de figuur rechts, waarbij Z, V en M respectievelijk de posities van de Zon, Mercurius en Venus voorstellen.
Bij maximale elongatie is de hoek $\widehat{ZMV} = 90°$.
Noemen we d_M de afstand van Mercurius tot de Zon en d_V de afstand van Venus tot de Zon, dan geldt dat

$$\sin \widehat{ZVM} = \frac{d_M}{d_V} = \frac{0{,}387}{0{,}719} = 0{,}538$$

waaruit volgt dat $ZVM = 32{,}6°$.

8. Een vriend met een massa van 65 kg staat in je buurt. Hoe ver moet die precies staan om dezelfde kracht uit te oefenen als de planeet Mars (met een massa van $6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg) die op een afstand van 0,52 astronomische eenheden staat?
a) 2,3 meter.
b) 0,8 mm.
c) 0,8 meter.
d) 2,3 mm.
e) 2,3 km.

Noemen we F_V de kracht die de vriend uitoefent en F_M de kracht die Mars uitoefent. Zij verder m_V de massa van de vriend, m_M die van Mars en m_0 je eigen massa en zij r_V en r_M de afstanden van respectievelijke de vriend en Mars. Uit de universele gravitatiewet weten we dan dat

$F_V = G\frac{m_V.m_0}{r_V^2}$ en dat $F_M = G\frac{m_M.m_0}{r_M^2}$, waarbij G de universele gravitatieconstante voorstelt. Aangezien $F_V = F_M$ vinden we dat $G\frac{m_V.m_0}{r_V^2} = G\frac{m_M.m_0}{r_M^2}$. Na verdere uitwerking volgt hieruit dat $r_V = \sqrt{\frac{m_V}{m_M}}.r_M$.

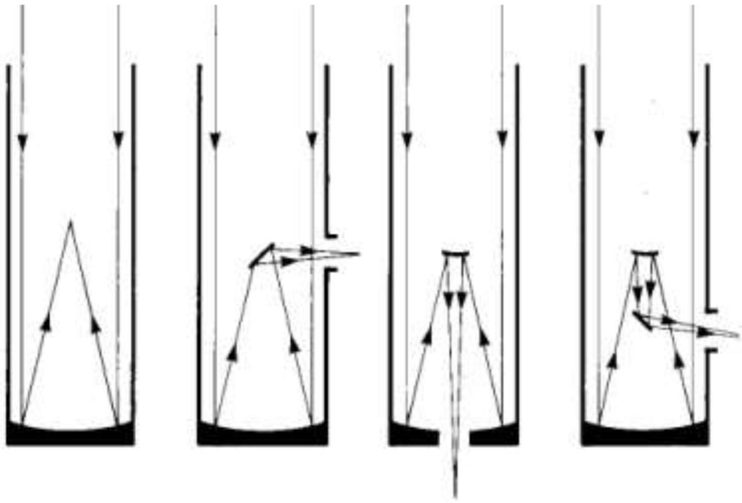
9. Een komeet volgt een elliptische baan rond de Zon met een apheliumafstand van 31,5 astronomische eenheden en een periheliumafstand van 0,5 astronomische eenheden. Wat is de periode van deze komeet?
a) 181 jaar.
b) 16 jaar.
c) 64 jaar.
d) 6,3 jaar.
e) 32 jaar.

De som van de periheliumafstand en de apheliumafstand is twee maal de lengte *a* van de halve lange baanas van de komeet. We vinden dus dat a = 16 astronomische eenheden. De periode P (in jaar volgt dan uit de derde wet van Kepler: $P^2 = a^3$.

10. Hieronder staan vier uitspraken over wat er zou gebeuren als een komeet zou inslaan op de Aarde:
(I) Grote hoeveelheden gesmolten rots zouden op de Aarde neerkomen en zo grote bosbranden veroorzaken.
(II) De ijskappen aan de polen zouden smelten.
(III) Aanzienlijke hoeveelheden radioactief materiaal zouden de dood veroorzaken van het merendeel van het dierlijk leven op Aarde.
(IV) Er zouden dikke wolken koolstofdioxide gevormd worden die voor langere tijd het zonlicht zouden blokkeren.
Welke uitspraken zijn zeker waar?
a) (I) en (IV);
b) (II) en (III);
c) (I), (II) en (III);
d) (I), (II) en (IV);
e) (II), (III) en (IV).

In sommige gevallen zouden mogelijks ook de andere verschijnselen zich kunnen voordoen (afhankelijk van de situatie), maar dit zal in elk geval niet steeds het geval zijn, en dus kunnen die uitspraken niet als zeker beschouwd worden. Denk bijvoorbeeld maar aan de inslag bij Tunguska op 30 juni 1908.

11. Op de figuur rechts zijn enkele configuraties van spiegeltelescopen weergegeven. Welke volgorde geeft deze configuraties correct weer?



a) Primair brandpunt – Newton brandpunt – Cassegrain brandpunt – Coudé brandpunt.
b) Newton brandpunt – Primair brandpunt – Cassegrain brandpunt – Coudé brandpunt.
c) Newton brandpunt – Primair brandpunt – Coudé brandpunt – Cassegrain brandpunt.
d) Primair brandpunt – Newton brandpunt – Coudé brandpunt – Cassegrain brandpunt.
e) Geen van bovenstaande.

12. Welk van volgende sterren is circumpolair in Roemenië (op 44°25’ noorderbreedte en 26°06’ oosterlengte)?
a) z Hercules (rechte klimming 16h41m, declinatie +31°36’).
b) b Boötis (rechte klimming 15h01m, declinatie +40°23’).
c) q Aurigae (rechte klimming 05h59m, declinatie +37°12’).
d) g Draconis (rechte klimming 17h56m, declinatie +51°26’).
e) Elk van de genoemde sterren is circumpolair in Roemenië.

Als f de plaatselijke breedteligging voorstelt, dan zijn alle sterren circumpolair waarvoor de declinatie groter is dan 90°– f .

13. Wanneer het sterrenbeeld Leeuw aan het ondergaan is, welk ander sterrenbeeld van de zodiak is dan aan het opkomen?
a) Sagittarius (de Schutter).
b) Libra (de Weegschaal).
c) Aquarius (de Waterman).
d) Cancer (de Kreeft).
e) Pisces (de Vissen).

Er dient een verschil in rechte klimming te zijn van ongeveer 12 h.

14. De baan van een exoplaneet rond een ster heeft een geprojecteerde halve lange as van 0,24”. Welke opening moet een telescoop minimaal hebben opdat de resolutie ervan voldoende zou zijn om die baan te kunnen oplossen in licht van 1000 nm golflengte?
a) 0,13 meter.
b) 0,52 meter.
c) 1,05 meter.
d) 3,10 meter.
e) 2,04 meter.

Als l de golflengte van het licht voorstelt en D de opening van de telescoop, dan wordt de hoekresolutie q gegeven door $\theta^{(rad)} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$ of $\theta^{('')} = 206265 \times 1{,}22\frac{\lambda}{D}$.
Gezien de geprojecteerde halve lange as 0,24” is, is de op te lossen hoek $\theta^{('')} = 0{,}48''$. We vinden dus dat $D = 206265 \times 1{,}22\frac{\lambda}{\theta^{('')}}$.

15. Veronderstel dat de absolute magnitude van een bepaalde ster 3,25 bedraagt. Rond de ster bevindt zich een exoplaneet op een afstand van 0,67 astronomische eenheden van de ster. Wat is de schijnbare magnitude van de ster gezien vanaf de exoplaneet?
a) –29,2.
b) –28,6.
c) –28,3.
d) –27,5.
e) –26,9.

We maken gebruik van de zogenaamde afstandsformule
$$M = m + 5 - 5\log d$$
waarbij M de absolute magnitude voorstelt, m de schijnbare magnitude en d de afstand in parsec. Hieruit volgt dat
$$m = M - 5 + 5\log d$$
en dan is het verder nuttig te weten dat 1 parsec = 206265 astronomische eenheden.

16. Een dubbelster heeft twee componenten A en B. Ster A heeft een massa van 5 zonsmassa’s en ster B heeft dezelfde massa als onze Zon. We gaan ervan uit dat de sterren cirkelvormige banen beschrijven. Hoeveel keer dichter bevindt ster A zich bij het massacentrum dan ster B?
a) 1 keer.
b) 3 keer.
c) 5 keer.
d) 10 keer.
e) 25 keer.

Als m_A en m_B de massa’s en r_A en r_B de stralen van de banen van de componenten A en B voorstellen, dan geldt dat $m_A r_A = m_B r_B$.

17. Op welke golflengte zendt een ster met een temperatuur van 5000 K het meest straling uit?
a) 58 nm.
b) 580 nm.
c) 460 nm.
d) 290 nm.
e) 5800 nm.

Het verband tussen de golflengte l $_{max}$ waarbij een ster van temperatuur *T* maximaal straalt, en de effectieve temperatuur van de ster wordt gegeven door de verschuivingswet van Wien:

$$\lambda_{max}.T = b$$

waarbij b = 2,897756ž10^{-3} K·m.

18. Een ster heeft een parallax van 0,25 boogseconden. Wat is de afstand van deze ster?
a) 2 parsec.
b) 0,5 lichtjaar.
c) 2 lichtjaar.
d) 4 parsec.
e) 0,5 parsec.

De afstand d (in parsec) en de parallax p (in boogseconden) staan met elkaar in verband volgens $d^{(pc)} = \frac{1}{p^{('')}}$.

19. Twee hoofdreekssterren A en B hebben hetzelfde spectraaltype en schijnbare visuele magnitudes van 17 en 12. Als ster A zich op een afstand van 1 kiloparsec bevindt, wat is dan de afstand van ster B?
a) 10 parsec.
b) 100 parsec.
c) 10 kiloparsec.
d) 50 parsec.
e) 100 kiloparsec.

Een magnitudeverschil van 5 komt overeen met een verschil in helderheid van factor 100. De helderheid neemt echter kwadratisch af met de afstand, zodat de afstand een factor 10 zal verschillen. Ster A is de schijnbaar zwakste, dus ster B bevindt zich een factor 10 dichter dan ster A (die zich op 1000 parsec bevindt).

20. De meest bepalende factor voor de tijd die een ster op de hoofdreeks van het Hertzsprung-Russell-diagram doorbrengt,
a) is de straal van de ster.
b) is het metaalgehalte van de ster.
c) is de verhouding tussen waterstof en helium in de ster.
d) is de massa van de ster.
e) is de afstand van de ster tot de Aarde.

De massa is veruit de meest bepalende factor. De afstand van de ster tot de Aarde speelt al helemaal geen rol.

21. De Grote Orionnevel (M42) in het sterrenbeeld Orion
a) is een Herbig-Haro object;
b) is een reflectienevel;
c) is een emissienevel;
d) bevat enkel jonge sterren met een lage massa;
e) is vermoedelijk ongeveer 5 miljard jaar oud.

De Orionnevel is een H-II-gebied in het sterrenbeeld Orion en wordt ook weleens aangeduid met M42 of NGC1976. De Orionnevel is het dichtstbijzijnde stervormingsgebied, op een afstand van 1400 lichtjaar van de Aarde. Het is een turbulente plek, waar veel sterren worden geboren. De nevel wordt verlicht door een aantal hete jonge sterren, onder andere de Trapezium cluster; het gaat zeker niet alleen om sterren met lage massa.

22. Welk van volgende bekende Messier objecten is te zien in het sterrenbeeld Hercules?
a) M13.
b) M31.
c) M42.
d) M57.
e) M83.

Messier 13 is een bolvormige sterrenhoop.
M31 is het Andromedastelsel (in Andromeda), M42 is de Orionnevel (in Orion), M57 is de Ringnevel (in de Lier) en M83 is het Zuidelijk Windmolenstelsel (een balkspiraalstelsel in het sterrenbeeld Hydra of Waterslang).

23. Aan de rand van een bepaalde oude bolvormige sterrenhoop bedraagt de ontsnappingssnelheid 8,5 km/s. De bolvormige sterrenhoop bevat allemaal rode sterren met elk ongeveer de helft van de massa van onze Zon. De straal van de bolvormige sterrenhoop bedraagt 100 parsec. Schat de massa van deze bolvormige sterrenhoop (uitgedrukt in zonsmassa's; 1 M¤ = $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg).
a) $1{,}2 \cdot 10^{4}$ M¤.
b) $6{,}8 \cdot 10^{4}$ M¤.
c) $3{,}1 \cdot 10^{5}$ M¤.
d) $5{,}6 \cdot 10^{5}$ M¤.
e) $8{,}4 \cdot 10^{5}$ M¤.

Een object met massa m kan ontsnappen aan een bolsymmetrisch lichaam van massa M en straal R wanneer de kinetische energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ gelijk is aan de potentiële energie $E_p = G\frac{m.M}{R}$ (waarbij $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2} de universele gravitatieconstante voorstelt). Hieruit volgt dat in dit geval $M = \frac{v^2 R}{2G}$.

24. Welke van onderstaande uitspraken over interagerende (of botsende) sterrenstelsels is waar?
a) Bij een botsing tussen twee sterrenstelsels, komt ook het merendeel van de sterren met elkaar in botsing.
b) Hoewel sterrenstelsels kunnen interageren, hebben dergelijke botsingen weinig impact op het uitzicht van de individuele stelsels.
c) Interacties tussen sterrenstelsels zijn het gevolg van sterke elektrische krachten tussen het gas in de stelsels.
d) Er is geen echt bewijs dat sterrenstelsels botsen en hoewel het theoretisch mogelijk is, weten we nog niet of dit ook werkelijk voorkomt.
e) Botsingen tussen sterrenstelsels kunnen kleinere sterrenstelsels volledig uiteenrukken.

Bij botsingen tussen sterrenstelsels komen de individuele sterren vrijwel nooit met elkaar in botsing, maar het uitzicht van de stelsels verandert wel drastisch. Het gaat hier om een gravitationele interactie en er zijn heel wat voorbeelden van interagerende stelsels bekend.

25. In het spectrum van een actieve galactische kern (AGN) neemt men een emissielijn van waterstof waar op 687,2 nm golflengte. De rustgolflengte van deze waterstoflijn is 121,6 nm. Bereken de verwijderingssnelheid van dit object ten opzichte van ons.
a) $1{,}40 \cdot 10^{5}$ km/s.
b) $2{,}14 \cdot 10^{5}$ km/s.
c) $2{,}57 \cdot 10^{5}$ km/s.
d) $2{,}82 \cdot 10^{5}$ km/s.
e) $3{,}00 \cdot 10^{5}$ km/s.

De roodverschuiving $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$ waarbij hier l = 687,2 nm en l $_0$ = 121,6 nm.
Voor kleine roodverschuivingen geldt dat $z = \frac{v}{c}$ waarbij v de verwijderingssnelheid is en c de

lichtsnelheid. Het is evenwel meteen duidelijk dat deze formule hier niet toepasbaar is en dat we moeten overschakelen op de formule voor de relativistische roodverschuiving: $z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1$ waaruit volgt $\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}$.

26. Welk van volgende verschijnselen is niet bruikbaar om de afstand tussen hemellichamen te bepalen?
a) een Venusovergang over de zonneschijf.
b) de wijziging van de positie van sterren zonder meetbare eigenbeweging aan de hemel met een tussentijd van zes maanden.
c) de dopplerverschuiving in het spectrum van sterren.
d) een totale zonsverduistering.
e) de periode van veranderlijke sterren van het Cepheïde type.

De dopplerverschuiving kan gebruikt worden voor afstandsbepaling bij spectra van verafgelegen sterrenstelsels, maar niet bij individuele sterren.

27. Een bepaald sterrenstelsel bevindt zich op een afstand van 7 Mpc. Wat is dan (bij benadering) de verwijderingssnelheid van dit stelsel?
a) 7 km/s.
b) 10 km/s.
c) 70 km/s.
d) 490 km/s.
e) Op basis van de verstrekte informatie valt dit onmogelijk (zelfs maar bij benadering) te bepalen.

Hiervoor kan de wet van Hubble gebruikt worden:

$$v = H_0 d$$

met v de verwijderingssnelheid in km/s en d de afstand van de galaxie in Mpc. De parameter H_0 wordt de constante van Hubble genoemd en wordt meestal uitgedrukt in km/s/Mpc. Momenteel gebruikt men meestal een waarde in de orde van $H_0 = 70$ km/s/Mpc.

28. Welk van onderstaande uitspraken over gravitatielenzen is foutief?
a) Elk object buigt licht af, ook als het object niet veel massa bevat.
b) Als de kromming van de ruimte niet zou beïnvloed worden door massa, dan zouden we nooit gravitatielenzen zien.
c) Alleen objecten waarvan de massa gedomineerd wordt door donkere materie kunnen licht afbuigen.
d) Gravitatielenzen kunnen meerdere beelden van eenzelfde object produceren.
e) Het beeld van sterrenstelsels die zich achter clusters bevinden wordt vaak vervormd door gravitationele lenzing.

Gewone baryonische materie kan net zo goed licht afbuigen.

29. Wat is de oorsprong van de kosmische achtergrondstraling?
a) Gammastraling die geproduceerd werd tijdens de eerste seconden na de Big Bang.
b) Gloeiend gas dat dateert uit de tijd dat het heelal transparant werd.
c) De eerste sterren die in het heelal gevormd zijn.
d) Neutrino's die geproduceerd zijn in nucleaire reacties tijdens de eerste 200 seconden na de Big Bang.
e) De botsing tussen sterrenstelsels.

Toen het heelal ontstond, was de gehele ruimte samengeperst. Hierdoor was de energie die nu verspreid is over astronomische afstanden allemaal te vinden in een heel klein volume, en was dus de temperatuur enorm hoog. Door deze hoge temperatuur was het onmogelijk om neutrale elementen te vormen. De atoomkernen en hun elektronen bezaten zoveel energie dat ze niet konden binden. Deze vrije ladingen interageren zeer gemakkelijk met de omringende fotonen en dit betekent dat de fotonen in het universum eigenlijk maar zeer kleine afstanden konden afleggen voor ze terug geabsorbeerd of verstrooid werden. De ruimte was toen dus opaak. Maar, naarmate dat de ruimte uitdijde, zakte ook de energiedichtheid en dus ook de temperatuur. Ongeveer 300000 jaar na de Big Bang was de temperatuur eindelijk zodanig gezakt dat de vrije protonen en elektronen konden binden tot stabiel neutraal waterstof. Het neutrale waterstof is veel ongevoeliger voor het omringende stralingsveld, wat ervoor zorgde dat de fotonen plots heel lange afstanden (ter grootte van het universum) konden afleggen voor ze iets tegenkwamen dat hun baan zou verstoren. Het universum werd dan transparant en de 'vrijgelaten' fotonen vormen de wat we tegenwoordig kosmische achtergrondstraling noemen.

30. We gaan uit van volgende kosmologische parameters (actuele waarden):

- de dichtheid van donkere energie: $r_{L} = 6{,}7\cdot10^{-27}$ kg/m^3
- de dichtheid van donkere materie: $r_{DM} = 2{,}4\cdot10^{-27}$ kg/m^3
- de dichtheid van normale materie: $r_{B} = 0{,}5\cdot10^{-27}$ kg/m^3

Wat is dan de verhouding tussen de dichtheid van donkere energie op het ogenblik van de emissie van de kosmische achtergrondstraling, en de huidige dichtheid van donkere energie?
a) 0,432.
b) 2,31.
c) 1.
d) 2,5.
e) 0,5.

De vergelijkingen van de algemene relativiteitstheorie zijn moeten worden aangepast om de versnelling van het universum te verklaren. Hiervoor is de kosmologische constante L (Lamda) gebruikt. Niemand weet goed wat deze constante inhoudt, of hoe deze correspondeert met een fysisch aspect van de realiteit. Wat we wel weten, is dat het waarschijnlijk een constante is. Hiermee bedoelen we dat er op dit ogenblik geen indicaties zijn dat L ruimte- of tijdsafhankelijk is. Gezien de dichtheid van de donkere energie evenredig is met de parameter L, kunnen we op dit ogenblik enkel stellen dat deze doorheen het bestaan van het universum onveranderd gebleven is. Zodus, dan is de verhouding tussen de hedendaagse waarde en die op elk moment in het verleden gelijk aan 1.

1.	**B**
2.	**B**
3.	**E**
4.	**A**
5.	**C**
6.	**D**
7.	**C**
8.	**C**
9.	**C**
10.	**A**

11.	**A**
12.	**D**
13.	**C**
14.	**B**
15.	**A**
16.	**C**
17.	**B**
18.	**D**
19.	**B**
20.	**D**

21.	**C**
22.	**A**
23.	**E**
24.	**E**
25.	**D**
26.	**C**
27.	**D**
28.	**C**
29.	**A**
30.	**C**

Open vragenreeks I: sterren

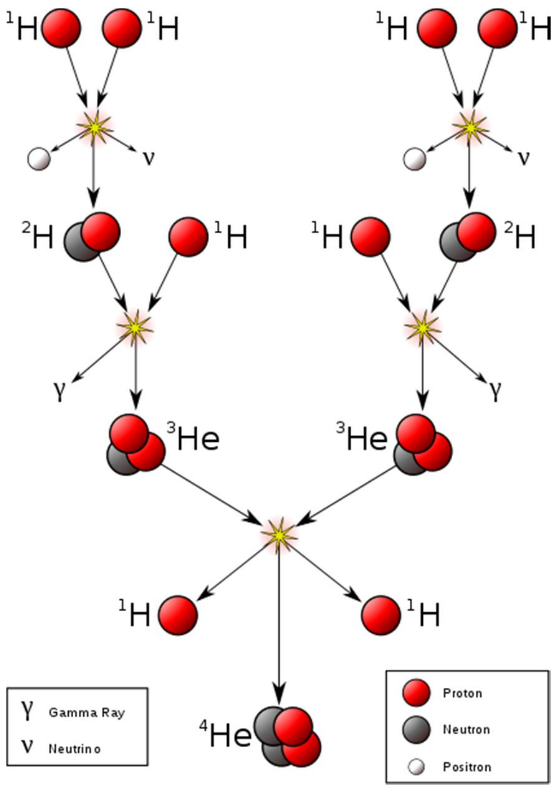
Voor onderstaande vragen mag gebruikgemaakt worden van volgende constanten:

- Boltzmann constante: $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K
- Lichtsnelheid: $c = 299\,792\,458$ m/s
- Gravitationele constante: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$
- Zonsmassa: $M_{zon} = 1{,}9891 \times 10^{30}$ kg
- Massa Aarde: $M_{aarde} = 5{,}972 \times 10^{24}$kg

Berekende massa's dienen steeds uitgedrukt te worden in de eenheid zonsmassa.

Vraag 1: waterstoffusie (omzetten van massa naar energie).
a) Beschrijf de proton-proton ketting die zorgt voor het merendeel van de energieproductie in de Zon.

Stap 1: Twee protonen fuseren tot een deuteriumkern (1 proton en 1 neutron). Hierbij komen een positron en een neutrino vrij. Deze stap gebeurt tweemaal in de volledige ketting.
Stap 2: De deuteriumkern en een derde proton vormen een helium-3 kern. Hierbij komt er energie vrij in de vorm van gammastraling. Ook deze stap komt tweemaal voor in de volledige ketting.
Stap 3: De twee helium-3 kernen smelten samen tot een helium-4 keren (2 protonen en 2 neutronen). 2 protonen worden uitgezonden in het proces.
In de volledige reactie smelten 4 protonen samen tot een helium-4 keren. Hierin worden positronen, neutrino's en gammastralen gecreëerd.



b) Wat is de massafractie die in energie omgezet wordt in deze keten.

De massa van een proton bedraagt $1{,}6726 \times 10^{-27} kg$ en de massa van een helium-4 kern is $6{,}690 \times 10^{-27} kg$. De massa van de positronen en neutronen is verwaarloosbaar tegenover de protonenmassa's. De fractie aan massa die verdwenen is, is dus gelijk aan:

$$\frac{6{,}69 - 4 \times 1{,}6726}{6{,}69} = 0.007$$

Er is dus 0,7% van de massa omgezet in energie.

c) In welke vorm komt deze energie vrij?

De energie komt vrij als kinetische energie van de neutrino's en als gammastraling. De positronen die gevormd worden in de eerste stap zullen annihileren met elektronen die aanwezig zijn in de Zon en zo ook gammastraling produceren.

d) Hoeveel waterstof wordt er iedere seconde naar helium omgezet in de Zon? Vertrek hiervoor van het gegeven dat de lichtkracht van de Zon $3{,}8 \times 10^{26}$ W is.

Iedere seconde wordt er in de Zon $3{,}8 \times 10^{26} J$ aan energie opgewekt. Gebruikmakend van de formule $E = mc^2$ kan er berekend worden hoeveel massa er dus iedere seconde in energie omgezet wordt:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}8 \times 10^{26}\, kg\, m^2\, s^{-2}}{299\,792\,458\, m\, s^{-1}} = 4{,}2 \times 10^{9} kg$$

Deze massa bedraagt 0,7% van de totale massa aan waterstof die in helium omgezet wordt per seconde:

$$m_{tot} = \frac{4{,}2 \times 10^{9}\, kg}{0{,}007} = 6{,}0 \times 10^{11} kg$$

e) Hoeveel keer per seconde gebeurt de fusiereactie van waterstof in helium in de Zon?

Hiervoor moet de totale massa die verloren gegaan is in het fusieproces, gedeeld worden door de massa die verloren gaat in 1 fusiereactie:

$$\#\, reacties = \frac{4{,}2 \times 10^{9} kg}{0{,}047 \times 10^{-27}} = 8{,}9 \times 10^{37}$$

Vraag 2: de ideale gaswet (druk in de Zon).
De druk in de Zon die ervoor zorgt dat deze niet volledig ineenstort onder de invloed van gravitatiekrachten, komt voort uit de thermische beweging van de gasdeeltjes in de Zon. De druk die dit gas uitoefent, kan beschreven worden door de ideale gaswet die de relatie tussen de druk van een gas en de temperatuur en deeltjesdichtheid van het gas beschrijft:

$$P = nkT$$

Hierin stelt P de druk van het gas voor, n de deeltjesdichtheid (bijvoorbeeld in deeltjes per kubieke centimeter) en T de temperatuur (in kelvin).
a) De kern van de Zon bestaat uit ongeveer 10^{26} deeltjes per kubieke centimeter en heeft een temperatuur van 15 miljoen kelvin. Vergelijk de gasdruk in de kern van de Zon met de gasdruk van de aardse atmosfeer op zeeniveau, waar zich ongeveer $2{,}4 \times 10^{19}$ deeltjes per kubieke centimeter bevinden op een temperatuur van 300 kelvin.

We berekenen de verhouding:

$$\frac{P_{zonkern}}{P_{atmosfeer}} = \frac{n_{kern} k\, T_{kern}}{n_{atm} k\, T_{atm}} = \frac{10^{26} cm^{-3} \times 1{,}5 \times 10^{7} K}{2{,}4 \times 10^{19} cm^{-3} \times 300\, K} = 2 \times 10^{11}$$

De druk in de kern van de Zon is dus 2×10^{11} zo groot als de atmosferische druk op Aarde.

b) Hoe zou de druk in de kern van de Zon veranderen als alle waterstof in de kern omgezet is in helium, ervan uitgaande dat dit gebeurt zonder volumeverandering of temperatuursverandering in de kern? Gebruik uw antwoord om uit te leggen wat er werkelijk zal gebeuren als de kern kan verkleinen en opwarmen. (Ga ervan uit dat de kern van de Zon initieel enkel uit waterstof bestaat dat volledig geïoniseerd is, en eindigt met enkel geïoniseerd helium. Hoe er rekening mee dat de kern van de Zon elektrisch neutraal is.)

In dit vereenvoudigde voorbeeld zijn er initieel twee deeltjes voor iedere waterstofkern (positron en elektron) en drie deeltje voor de finale heliumkern (1 heliumkern en 2 elektronen). Er zijn echter 4 waterstofkernen nodig om helium te vormen. Voor de reactie zijn er dus 8 deeltjes (4 protonen en 4 elektronen) en na de reactie 3 deeltjes (1 heliumkern en 2 elektronen). De overige 2 elektronen zullen annihileren met de positronen gecreëerd in de eerste stap van de proton-proton ketting. Er zijn dus 3/8 van de originele deeltjes aanwezig nadat alle waterstof in helium gefuseerd is. Omdat in het voorbeeld gesteld wordt dat het volume en de temperatuur niet wijzigen zal de gasdruk 3/8 van de originele gasdruk zijn.
In werkelijkheid zal de daling in druk ervoor zorgen dat de gravitatiedruk overwint op de gasdruk. De kern van de Zon zal dus gaan krimpen onder invloed van de gravitatiekracht naarmate er steeds meer waterstof in helium omgezet wordt. Het ineenkrimpen van de kern zal er voor zorgen dat de densiteit van de deeltjes ongeveer gelijk blijft. Dit geleidelijk proces zal er ook voor zorgen dat de temperatuur lichtjes stijgt en daarmee de fusiesnelheid, waardoor de lichtkracht (luminositeit) van de Zon geleidelijk aan toeneemt gedurende de waterstofverbrandingsfase in haar leven.

Vraag 3: zwaartekracht versus druk.
Een gaswolk kan ineenstorten tot een ster als de inwaartse kracht veroorzaakt door gravitatie groter is dan de uitwaartse kracht die veroorzaakt wordt door de thermische druk. Hiervoor kan een minimummassa van de wolk berekend worden waarbij beide krachten even groot zullen zijn. Deze massa wordt gegeven door:

$$M_{balans} = 18 \cdot M_{zon} \cdot \sqrt{\frac{T^3}{n}}$$

waarin T de temperatuur (in kelvin) voorstelt en n de deeltjesdichtheid (in deeltjes per kubieke centimeter).
a) Een typische moleculaire wolk heeft een temperatuur van 30 K en een gemiddelde dichtheid van 300 deeltjes per kubieke centimeter. Wat is de minimale massa die de wolk moet hebben zodat er een ster kan gevormd worden?

Deze minimale massa kan berekend worden met de gegeven formule:

$$M_{balans} = 18 \cdot M_{zon} \cdot \sqrt{\frac{30^3}{300}} \approx 171\, M_{zon}$$

De minimale massa die de wolk moet hebben zodat er een ster gevormd kan worden is dus ongeveer $171\, M_{zon}$.

b) Naarmate een gaswolk instort, zal de dichtheid toenemen. De temperatuur daarentegen kan aanzienlijk laag blijven zolang de wolk genoeg thermische energie, gegenereerd door de gravitationele samentrekking van de wolk, in de vorm van straling kan uitzenden. Veronderstel dat de dichtheid van een wolk een dichtheid van 300 000 deeltjes per kubieke centimeter bereikt, maar nog steeds een temperatuur van 30 K heeft. Welke massa is dan nodig om de stervorming te laten doorgaan?

Toepassing van dezelfde formule leidt hier tot:

$$M_{balans} = 18 \cdot M_{zon} \cdot \sqrt{\frac{30^3}{300000}} \approx 5{,}4\ M_{zon}$$

De massa die nu nodig is om stervorming te laten doorgaan is ongeveer $5{,}4\ M_{zon}$.

c) Vergelijk de massa die je in vraag (a) en (b) bekomen hebt met de massa van een gemiddelde ster. Wat kan je hieruit besluiten over stervorming?

Onze Zon kan beschouwd worden als een gemiddelde ster. De meeste sterren hebben een massa die van dezelfde grootteorde is als de massa van de Zon. De ster in vraag b kan dus als een gemiddelde ster beschouwd worden. Grote wolken die samentrekken en instorten, zullen naarmate hun dichtheid stijgt, uiteindelijk uiteenvallen in kleinere stukken die elk op zich zullen ineenstorten tot sterren, aangezien de massa die nodig is opdat de wolk zou instorten kleiner wordt als de dichtheid stijgt. Een grote wolk zal dus – als deze samentrekt – uiteindelijk versnipperen in kleinere gebieden en zo worden verschillende sterren in groep gevormd/geboren (wat ook zo waargenomen wordt).

Vraag 4: Schwarzschildstraal.

a) Leg uit wat de Schwarzschildstraal R_s van een zwart gat is en toon aan dat deze geschreven kan worden als:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

De Schwarzschildstraal is de afstand van waar licht (snelst mogelijke fysische snelheid) nog net aan de gravitatie van het zwarte gat kan ontsnappen. Nu kan de ontsnappingsnelheid *v* van een object met massa *m* aan een ander object met massa *M* berekend worden door de wet van behoud van energie toe te passen:

$$\frac{GMm}{r} = \frac{mv^2}{2}$$

Hierin stelt *r* de afstand van het object met massa *m* voor ten opzichte van het object (zwart gat) met massa *M*. Het linkerlid stelt de potentiele energie voor die overwonnen moet worden. Het rechterlid is de kinetische energie van het voorwerp met massa *m* en snelheid *v*. Hieruit kan berekend worden dat de ontsnappingsnelheid geschreven kan worden als

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Nu kan voor de Schwardzschildradius R_s de ontsnappingsnelheid gelijkgesteld worden aan de lichtsnelheid c, waaruit volgt:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

b) Wat is de Schwarzschildstraal van een zwart gat met een massa van 10 M_{zon}?

Invullen van de numerieke waarden levert:

$$R_s = \frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} m^3\, kg\, s^2 \times 10 \times 1{,}9891 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}}{299792458^2\ \mathrm{m^2 s^{-2}}} = 30\ km$$

De Schwarzschildstraal van een zwart gat met een massa van 10 M_{zon} bedraagt 30 km.

c) Zwarte gaten die waargenomen worden in het huidige heelal hebben steeds een massa die de neutronenster limiet overschrijdt; deze limiet is ongeveer gelijk aan drie zonsmassa's. Stephen Hawking en anderen speculeren echter dat veel minder zware mini-zwarte gaten gevormd konden worden tijdens de Big Bang. Veronderstel dat zo'n mini zwart gat de massa van de Aarde zou hebben, hoe groot zou het dan zijn?

We passen terug voorgaande formule toe en vinden:

$$R_s = \frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} m^3\, kg\, s^2 \times 10 \times 5{,}972 \times 10^{24}\mathrm{kg}}{299792458^2\ \mathrm{m^2 s^{-2}}} \approx 0{,}009\, m = 9\, mm$$

De Schwarzschildradius van een zo'n mini zwart gat met de massa van de Aarde zou 9 mm bedragen.

d) Wat zou het effect zijn op de baan van de Aarde als de Zon vervangen zou worden door een zwart gat met eenzelfde massa?

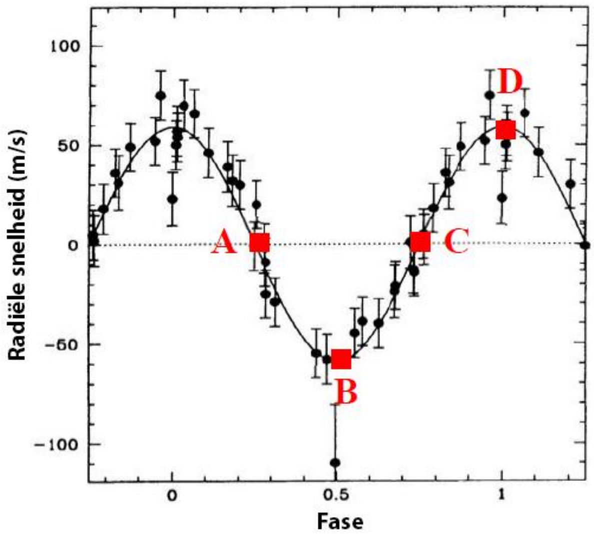
De baan van de Aarde wordt bepaald door de zwaartekracht uitgeoefend door de Zon op de Aarde. Deze kracht voldoet aan de zwaartekrachtswet van Newton:

$$F_z = \frac{GM_zM_a}{r^2}$$

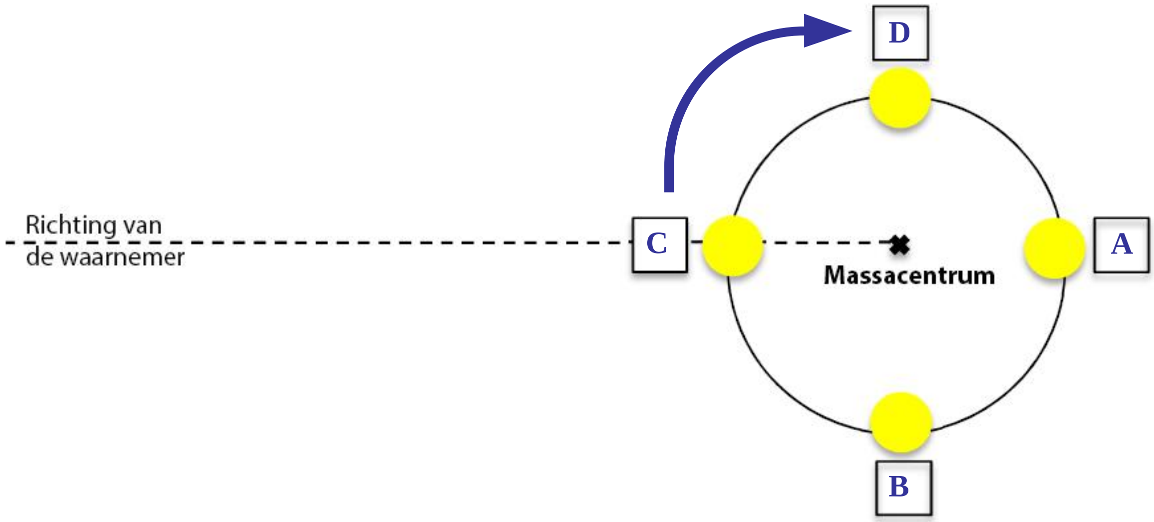
waarbij M_z de massa van de Zon voorstelt, M_a de massa van de Aarde en r de afstand tussen de Zon en de Aarde. Stel nu dat de Zon een zwart gat wordt met eenzelfde massa, dan verandert er niets aan bovenstaande formule en zal de zwaartekracht uitgeoefend op de Aarde nog steeds dezelfde zijn. Bijgevolg zal er niets veranderen aan de baan van de Aarde.

Open vragenreeks II: exoplaneten

In 1995 werd de eerste echte exoplaneet ontdekt, rond de ster 51 Pegasi. Deze ontdekking gebeurde door het spectrum van de moederster te bestuderen en daaruit kleine veranderingen in de radiële snelheid van de ster af te leiden (ten gevolge van de beweging van de planeet en de ster rond hun gemeenschappelijk massacentrum). De planeet bleek een vrijwel cirkelvormige baan te beschrijven met een periode van 4,23 dagen. Deze detectiemethode maakt dus gebruik van de radiële snelheid en is gebaseerd op het dopplereffect. De figuur rechts geeft het verloop van de radiële snelheid van 51 Pegasi weer.



Vraag 1.
a) De figuur hieronder (niet op schaal) geeft schematisch de positie weer van de ster 51 Pegasi ten opzichte van het massacentrum van het systeem ster – planeet (afgeleid uit het verloop van de radiële snelheid zoals weergegeven in de figuur hierboven). Geef in de vakjes aan met welk punt in het verloop van de radiële snelheid (A, B, C, D) elke positie correspondeert, en leg je keuze duidelijk uit! Daarbij mag aangenomen worden dat de ster in wijzerzin beweegt.



De radiële snelheid is de snelheid van een object langs de gezichtslijn. Een positieve radiële snelheid betekent dat de ster zich van ons verwijdert; een negatieve radiële snelheid betekent dat de ster naar ons toe komt. De radiële snelheid is nul op het ogenblik dat de snelheidsvector loodrecht op onze kijkrichting staat.

b) Bepaal op basis van de eerste figuur de snelheid van de ster rond het massacentrum van het systeem ster – planeet. Geef eveneens een schatting van de gemaakte fout.

De snelheid van de planeet rond de ster komt overeen met de maximale waarde voor de radiële snelheid. Op de figuur kunnen we aflezen dat

$$v_{ster} = 60 \pm 10\, m\, s^{-1}$$

Merk op dat hierbij geen rekening is gehouden met de inclinatie van de baan (zie verder).

Vraag 2.

a) De ster 51 Pegasi heeft een massa die vergelijkbaar is met die van onze zon. Schat nu de afstand van de gevonden planeet tot de ster 51 Pegasi (uitgedrukt in astronomische eenheden). Daarbij mag verondersteld worden dat de massa van de planeet verwaarlooswaar is ten opzichte van die van de ster.

We noemen a de straal van de (cirkelvormig veronderstelde baan) en P de omloopperiode van de planeet. We gebruiken nu de derde wet van Kepler

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_{ster}+m_{planeet})}$$

en veronderstellen daarbij dat $m_{planeet} \ll M_{ster}$ en er is ook gegeven dat $M_{ster} \approx M_{\odot}$. Als we dus a in astronomische eenheden uitdrukken en P in jaar, dan geldt dat

$$\frac{P^2}{a^3} = 1$$

waaruit dan volgt dat

$$a \approx 0{,}05\, AE$$

b) Schat de massa van de gevonden exoplaneet, uitgedrukt in termen van de massa van Jupiter ($M_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg).

Gezien de impuls van de ster en de planeet dezelfde moeten zijn, geldt voor de afstand van de planeet en de ster tot het massacentrum dat

$$m_{planeet} r_{planeet} = M_{ster} r_{ster}$$

Dankzij de veronderstelling van een cirkelvormige baan weten we ook dat

$$v_{ster} = \frac{2\pi r_{ster}}{P}$$

Uit voorgaande uitdrukkingen bekomen we dus dat

$$m_{planeet} = \frac{M_{ster} r_{ster}}{r_{planeet}} = \frac{M_{ster} v_{ster} P}{2\pi r_{planeet}} = \frac{M_{\odot} v_{ster} P}{2\pi a}$$

zodat

$$m_{planeet} = \frac{1{,}99\cdot 10^{30} \times 60 \times 4{,}23 \times 86400}{2\pi \times 0{,}05 \times 1{,}5\cdot 10^{11}}\, kg$$

en dus

$$m_{planeet} \approx 9{,}3 \cdot 10^{26} kg \approx 0{,}49\, M_J$$

c) Leg uit waarom de zopas gevonden schatting een ondergrens is voor de echte massa van de exoplaneet.

Dit is een ondergrens omdat we geen rekening hebben gehouden met de inclinatie van de baan. Omdat hierover geen informatie bekend was, zijn we er in feite vanuit gegaan dat we recht tegen het baanvlak aankijken (‘edge-on’), en dat de inclinatie dus 90° is.
Veronderstel dat het baanvlak van de exoplaneet een hoek *i* zou maken met het raakvlak aan de hemelsfeer (dus een hoek 90°–*i* met onze gezichtslijn), dan zou de gemeten radiële snelheid eigenlijk $v \sin i$ zijn en dus zouden we de zopas berekende massa moeten delen door $\sin i$ om de werkelijke massa van de planeet te bekomen.
De methode van de radiële snelheid laat evenwel niet toe om de hoek *i* te bepalen.

Vraag 3.
Veronderstel nu niet langer dat de massa van de planeet verwaarlooswaar is ten opzichte van die van de ster 51 Pegasi. Bereken dan de massa van de exoplaneet (uitgedrukt in Jupitermassa’s).
Tip: er kan gebruikgemaakt worden van een uitdrukking die de verhouding van de stralen van de banen van de planeet ($r_{planeet}$) en van de ster (r_{ster}) rond het gemeenschappelijke massacentrum weergeeft ($r_{planeet}$ / r_{ster}).

Zonder de veronderstelling $m_{planeet} \ll M_{ster}$ luidt de derde wet van Kepler

$$\frac{P^2}{(r_{ster}+r_{planeet})^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_{ster}+m_{planeet})}$$

Zoals hoger reeds vermeld, geldt dat $m_{planeet} r_{planeet} = M_{ster} r_{ster}$ zodat

$$m_{planeet} = M_{ster}\frac{r_{ster}}{r_{planeet}}$$

Als we dit vervangen in de derde wet van Kepler, dan bekomen we

$$\frac{P^2 G M_{ster}}{4\pi^2}\left(\frac{r_{ster}+r_{planeet}}{r_{planeet}}\right) = (r_{ster} + r_{planeet})^3$$

of nog

$$\frac{P^2 G M_{ster}}{4\pi^2 r_{ster}^3} = \frac{r_{planeet}}{r_{ster}}\left(1 + \frac{r_{planeet}}{r_{ster}}\right)^2$$

Hoger hadden we reeds gevonden dat

$$r_{ster} = \frac{v_{ster} P}{2\pi} = 3{,}49 \cdot 10^6 m$$

Uitgedrukt in SI-eenheden vinden we dan:

$$\frac{r_{planeet}}{r_{ster}}\left(1 + \frac{r_{planeet}}{r_{ster}}\right)^2 = \frac{(4{,}23\times 86400\ s)^2 \times 6{,}674\cdot 10^{-11}\ m^3\ s^{-2} kg^{-1} \times 1{,}99\cdot 10^{30}\ kg}{4\pi^2(3{,}49\cdot 10^6 m)^3}$$

met als resultaat

$$\frac{r_{planeet}}{r_{ster}}\left(1 + \frac{r_{planeet}}{r_{ster}}\right)^2 = 1{,}057 \cdot 10^{10}$$

waaruit (gezien $\frac{r_{planeet}}{r_{ster}} \approx 1 + \frac{r_{planeet}}{r_{ster}}$) gemakkelijk volgt dat

$$\frac{r_{planeet}}{r_{ster}} = 2195$$

en

$$m_{planeet} = \frac{M_{ster}}{2195} = 9{,}07 \cdot 10^{26} kg \approx 0{,}48\ M_J$$

Open vragenreeks III: sterrenstelsels

In de wereld van sterrenstelsels staan vele eigenschappen met elkaar in verband. Aan de hand van enkele metingen kan men al veel te weten komen over een sterrenstelsel.

Vraag 1.
Zo is er bijvoorbeeld de Tully-Fisher relatie voor spiraalstelsels, die het verband tussen lichtkracht en rotatiesnelheid geeft:

$$L = 3{,}9 \cdot V_{rot}^4$$

in de K-band, met V_{rot} in km/s en L uitgedrukt in eenheden van lichtkracht van de Zon.
a) Leg uit wat L en V_{rot} zijn.

L stelt de lichtkracht voor en kan gezien worden als het totale vermogen van een sterrenstelsel. Het is de hoeveelheid energie die in een bepaalde tijd uitgezonden wordt.
V_{rot} is de gemiddelde rotatiesnelheid van het sterrenstelsel rond zijn centrum.

b) Leg uit waarom L en V_{rot} met elkaar in verband staan.

De Tully-Fisher relatie heeft betrekking op de totale massa van een sterrenstelsel die actief bijdraagt tot stervorming. Het gaat hier bijna altijd om spiraalstelsels. Een hogere massa zal steeds snellere rotatie met zich meebrengen. Dit volgt uit de zwaartekrachtwet. Bij een te lage rotatiesnelheid zijn de banen immers niet stabiel en vallen sterren naar het centrum van het sterrenstelsel toe.
Tegelijk duidt een hogere massa op een hoger vermogen om licht te produceren (meer sterren). Vandaar dat dan ook de lichtkracht hoger is.

Vraag 2.
Voor een spiraalstelsel werden metingen gedaan in het nabije infrarood (K-band) en in het radiogebied (21 cm lijn). Het sterrenstelsel blijkt een schijnbare magnitude te hebben van 16,7. Uit de 21 cm lijn leiden we af dat het roteert aan een snelheid van 150 km/s.
a) Gebruik de Tully-Fisher relatie om de afstand tot dit sterrenstelsel te bepalen.

In dit geval is $V_{rot} = 150\ km/s$ zodat we vinden dat

$$L = 3{,}9 \cdot V_{rot}^4 = 1{,}97 \cdot 10^9\ L_\odot$$

De lichtkracht van een ster kan uit de absolute magnitude berekend worden op basis van de formule van Pogson:

$$M = M_\odot - 2{,}5 \log \frac{L}{L_\odot}$$

waarbij $M_\odot = 4{,}79$ de absolute magnitude van de Zon voorstelt. Zo vinden we

$$M = 4{,}79 - 2{,}5 \times (9 + \log 1{,}97) = -18{,}4$$

We vormen de zogenaamde afstandsformule

$$M = m + 5 - 5\log d$$
om tot
$$d = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$$
waaruit
$$d = 10^{\frac{16,7-(-18,4)+5}{5}} \approx 105\,Mpc$$
volgt.

b) Verifieer deze afstand aan de hand van de wet van Hubble. Uit de 21 cm lijn blijkt dat het sterrenstelsel van ons weg beweegt met een snelheid van 6790 km/s.

De wet van Hubble stelt dat:
$$v = H_0 d$$
met v de verwijderingssnelheid in km/s en d de afstand van de galaxie in Mpc. De parameter H_0 wordt de constante van Hubble genoemd en wordt meestal uitgedrukt in km/s/Mpc. Momenteel gebruikt men meestal een waarde in de orde van $H_0 = 70\ \mathrm{km/s/Mpc}$.
Op die manier vinden we
$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{6790\,km/s}{70\ \mathrm{km/s/Mpc}} \approx 97\,Mpc$$

Vraag 3.
De tegenhanger voor ellipsvormige sterrenstelsels is de Faber-Jackson relatie, waar de lichtkracht kan bepaald worden aan de hand van de centrale snelheidsdispersie σ:
$$L = 2 \cdot 10^{10}\left(\frac{\sigma}{200}\right)^4$$
in de V band, met σ in km/s en L uitgedrukt in eenheden van de lichtkracht van de Zon.
a) Stel dat de vorige observatie geen spiraalstelsel was, maar een ellipsvormig stelsel met dezelfde lichtkracht. Wat zou dan de snelheidsdispersie σ zijn?

Volgens de Faber-Jackson relatie krijgen we:
$$\sigma = 200 \times \left(\frac{1,97\times10^9}{2\times10^{10}}\right)^{0.25} = 112\,km/s$$

b) Leg het begrip snelheidsdispersie uit.

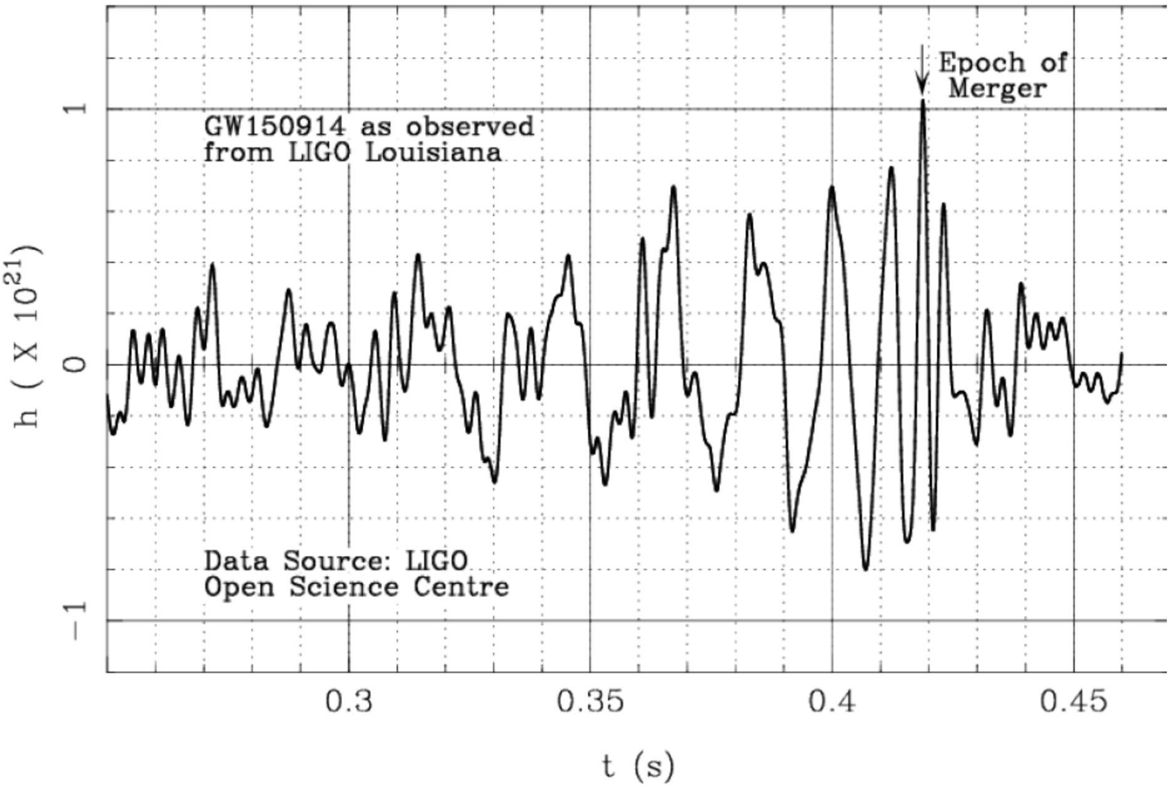
De snelheidsdispersie slaat op de statistische spreiding in snelheden voor de verschillende sterren in een sterrenstelsel. Een distributie (histogram) van de rotatiesnelheden van alle sterren benadert meestal een normale verdeling. De standaardafwijking van deze verdeling wordt de snelheidsdispersie genoemd. Hoge snelheidsdispersies duiden dus op een hoge spreiding in snelheden. Dit wil zeggen dat er veel willekeurige beweging is binnen het sterrenstelsel, ten opzichte van geordende beweging (rotatie).

c) Wat is de stellaire massa van dit object? Vermeld je bron voor de K-band massa-lichtkracht verhouding.

De massa-lichtkracht verhouding in de K band kan nogal verschillen afhankelijke van bron tot bron. Voor de stellaire massa van het betreffende object zijn massa's tussen 10^9 en 10^{10} zonsmassa's realistisch.

Open vragenreeks IV: gravitatiegolven

Op 14 september 2015 konden zwaartekrachtgolven voor het eerst rechtstreeks waargenomen worden. Dat gebeurde met de twee LIGO-detectoren in Hanford en Livingston (USA). Het waargenomen signaal wordt getoond in onderstaande figuur.
Voor deze opgave zullen we veronderstellen dat dit signaal veroorzaakt wordt door een kleine testmassa m die een baan beschrijft rond een veel grotere massa M (i.e. $m \ll M$). Daarbij zullen we verschillende modellen bekijken voor de aard van de centrale massa.



Door het uitzenden van gravitatiegolven verliest de testmassa m energie. Hierdoor wordt de baan kleiner, tot de testmassa uiteindelijk op het oppervlak van het groter object terechtkomt, of in het geval van een zwart gat op de binnenste stabiele cirkelvormige baan (innermost stable circular orbit of ISCO); voor de straal R_{ISCO} van deze baan geldt dat $R_{ISCO} = 3R_S$ waarbij R_S de Schwarzschild straal van het zwart gat voorstelt. Dat is het ogenblik van de zogenoemde vermenging of botsing (aangeduid met 'epoch of merger' op de figuur). Dat is ook het moment waarop de amplitude van de gravitatiegolf maximaal is, en ook de frequentie is dan maximaal (en is steeds dubbel zo groot als de baanfrequentie; deze laatste is het aantal omlopen per tijdseenheid).
We zullen ons hier toespitsen op de gravitatiegolven op het ogenblik vlak voor de botsing, waarbij we er van uitgaan dat de wetten van Kepler dan nog gelden. Na de botsing verandert de vorm van het signaal drastisch.

Vraag 1.
a) Beschouw het signaal van de gravitatiegolven in bovenstaande figuur en schat de periode T_0 van de golf vlak voor de vermenging.

Op de grafiek lezen we vlak voor de piek van de emissie af dat de periode van de gravitatiegolven ongeveer

$$T_0 = 0{,}007\ s$$

($\pm\ 0{,}004\ s$) is. (Waarden tussen 0,003 s en 0,011 s worden aanvaard.)

b) Bereken hieruit de frequentie f_0 van de golf vlak voor de botsing.

De frequentie is uiteraard het omgekeerde van de periode en derhalve vinden we

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 142{,}86\ Hz$$

(Waarden tussen 333,33 Hz en 90,91 Hz worden aanvaard.)

Vraag 2.
Voor sterren op de hoofdreeks in het Hertzsprung-Russell-diagram staan de straal R_{MS} en de massa M_{MS} van een ster met elkaar in verband via een machtwet:

$$R_{MS} \sim (M_{MS})^{\alpha}$$

Hierbij geldt

$\alpha = 0{,}8$ voor $M_{MS} > 1\ M_\odot$

$\alpha = 1{,}0$ voor $0{,}08\ M_\odot \leq M_{MS} \leq 1\ M_\odot$

a) Veronderstel dat het centrale object een hoofdreeksster zou zijn. Stel dan een uitdrukking op voor de maximale frequentie f_{MS} van de gravitatiegolven, in functie van de massa ($M_{MS}/M_\odot$) van de centrale ster en in functie van α. Tip: zoals hoger reeds vermeld is de frequentie f_{grav} van de gravitatiegolf maximaal op het ogenblik net voor de botsing, en is deze dubbel zo groot als de baanfrequentie f_{baan} van het testobject ($f_{grav} = 2\ f_{baan}$).

Zoals aangegeven veronderstellen we dat het signaal veroorzaakt wordt door een kleine testmassa m die een baan met straal r beschrijft rond een veel grotere massa M (i.e. $m \ll M$). In dat geval luidt de derde wet van Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

zodat

$$f_{baan} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

De frequentie van de gravitatiegolven zelf is dan

$$f_{grav} = 2 f_{baan} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

De frequentie van de gravitatiegolven is maximaal vlak voor de botsing, dus wanneer $r = R_{MS}$.

Uitgaande van

$$\frac{R_{MS}}{R_\odot} = \left(\frac{M_{MS}}{M_\odot}\right)^\alpha$$

vinden we

$$R_{MS} = R_\odot \left(\frac{M_{MS}}{M_\odot}\right)^\alpha$$

Als we dit invullen in de eerder bekomen uitdrukking, dan volgt hieruit dat

$$f_{MS} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_{MS}}{R_{MS}^3}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_{MS}}{R_\odot^3}}\left(\frac{M_\odot}{M_{MS}}\right)^{\frac{3\alpha}{2}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\odot^3}}\left(\frac{M_\odot}{M_{MS}}\right)^{\frac{3\alpha-1}{2}}$$

zodat

$$f_{MS} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\odot^3}}\left(\frac{M_{MS}}{M_\odot}\right)^{\frac{1-3\alpha}{2}}$$

b) Gebruik dit resultaat om de waarde van α te bepalen die aanleiding zal geven tot de maximaal mogelijke frequentie van de gravitatiegolven $f_{MS,max}$ voor om het even welke hoofdreeksster.

In geval $M_{MS} > M_\odot$ is α = 0,8 en is dus de exponent $\frac{1-3\alpha}{2} < 0$, wat leidt tot een kleinere frequentie. Voor de hoogste mogelijke frequentie die afkomstig kan zijn van een hoofdreeksster dient dus voor de laagste mogelijke massa gekozen te worden zodat derhalve α = 1,0.

c) Bereken ook deze maximaal mogelijke frequentie van de gravitatiegolven $f_{MS,max}$.

Dan bekomen we

$$f_{MS,max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\odot^3}}\left(\frac{M_{MS}}{M_\odot}\right)^{\frac{1-3\times 1}{2}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\odot^3}} \times \frac{M_\odot}{M_{MS}}$$

Invullen van de numerieke waarden leidt dan tot

$$f_{MS,max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6{,}674\cdot 10^{-11}\, m^3\, s^{-2} kg^{-1} \times 1{,}99\cdot 10^{30}\, kg}{(6{,}96\cdot 10^8\, m)^3}} \times \frac{1}{0{,}08} \approx 0{,}0025\, Hz = 2{,}5\, mHz$$

Vraag 3.

a) Witte dwergen hebben een massa die nooit hoger kan zijn dan 1,44 $M_\odot$ (de zogenoemde Chandrasekhar limiet). Voor witte dwergen geldt volgende relatie tussen de massa en de straal:

$$R_{WD} \sim (M_{WD})^{-\frac{1}{3}}$$

De straal van een witte dwerg met dezelfde massa als onze Zon bedraagt ongeveer 6000 km. Bereken de hoogst mogelijke frequentie $f_{WD,max}$ van de uitgezonden gravitatiegolven in het geval de testmassa een baan zou beschrijven rond een witte dwerg.

De maximale frequentie $f_{WD,max}$ wordt in dit geval bekomen voor $r = R_{WD}$.
We gebruiken de notatie $R_{WD\odot}$ voor de straal van een witte dwerg van een zonsmassa. Daarbij is dus gegeven dat $R_{WD\odot}$ = 6000 km.
Uitgaande van

$$\frac{R_{WD}}{R_{WD\odot}} = \left(\frac{M_{WD}}{M_\odot}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

vinden we nu

$$R_{WD}^3 = R_{WD\odot}^3 \frac{M_\odot}{M_{WD}}$$

Als we dit invullen in de eerder bekomen uitdrukking, dan volgt hieruit dat

$$f_{WD} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_{WD}}{R_{WD}^3}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_{WD}}{R_{WD\odot}^3}}\sqrt{\frac{M_{WD}}{M_\odot}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_{WD\odot}^3}}\frac{M_{WD}}{M_\odot}$$

Voor de maximale frequentie moeten we de hoogst mogelijke massa voor een witte dwerg nemen, zodat het invullen van de numerieke waarden dan leidt tot

$$f_{WD,max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_{WD\odot}^3}}\frac{M_{WD}}{M_\odot} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6{,}674\cdot 10^{-11}\, m^3\, s^{-2} kg^{-1} \times 1{,}99\cdot 10^{30}\, kg}{(6000\cdot 10^3\, m)^3}} \times 1{,}44 = 0{,}359\, Hz$$

b) Neutronensterren zijn zeer compacte objecten met massa's tussen 1 en 3 zonsmassa's, en met stralen tussen 10 en 15 km. Bepaal nu het interval van frequenties (dus $f_{NS,min}$ en $f_{NS,max}$) van de uitgezonden gravitatiegolven in het geval de testmassa een baan zou beschrijven zeer dicht bij een neutronenster.

Aangezien

$$f_{grav} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_{NS}}{R_{NS}^3}}$$

bekomen een minimale frequentie is M_{NS} zo laag mogelijk is en R_{NS} zo hoog mogelijk. Op basis van de gegeven informatie nemen we in dit geval dus M_{NS} = 1 M¤ en R_{NS} = 15 km. Invullen van deze numerieke waarden levert

$$f_{NS,min} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6{,}674\cdot 10^{-11}\, m^3\, s^{-2} kg^{-1} \times 1{,}99\cdot 10^{30}\, kg}{(15\cdot 10^3\, m)^3}} = 1996\, Hz = 1{,}996\, kHz$$

Volkomen analoog moeten we voor een maximale frequentie M_{NS} = 3 M¤ en R_{NS} = 10 km nemen, wat als resultaat

$$f_{NS,max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6{,}674\cdot 10^{-11}\, m^3\, s^{-2} kg^{-1} \times 3 \times 1{,}99\cdot 10^{30}\, kg}{(10\cdot 10^3\, m)^3}} = 6352\, Hz = 6{,}352\, kHz$$

oplevert.

c) In het geval de centrale massa een zwart gat zou zijn, heeft de binnenste stabiele cirkelvormige baan van een testobject straal R_{ISCO} met $R_{ISCO} = 3R_S$ waarbij R_S de Schwarzschild straal van het zwart gat voorstelt. Bereken de frequentie f_{ZG} van de uitgezonden gravitatiegolven in het geval de testmassa een baan zou beschrijven rond een zwart gat, in functie van de massa (M_{ZG}/M¤) van het zwart gat.

Voor een zwart gat vinden we

$$f_{ZG} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_{ISCO}^3}} \times \frac{M_\odot}{M_{ZG}}$$

en dus

$$f_{ZG} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot}{27R_{S\odot}^3}} \times \frac{M_\odot}{M_{ZG}}$$

waarbij dan $R_{S\odot}$ de Schwarzschild straal is van een zwart gat van een zonsmassa.
Algemeen is (zie open vragenreeks I vraag 4)

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

zodat we vinden

$$f_{ZG} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM_\odot c^6}{27\times 8\times G^3 M_\odot^3}} \times \frac{M_\odot}{M_{ZG}} = \frac{c^3}{\pi G M_\odot}\sqrt{\frac{1}{27\times 8}} \times \frac{M_\odot}{M_{ZG}}$$

Invullen van deze numerieke waarden levert

$$f_{ZG} = \frac{(3\cdot 10^8\, ms^{-1})^3}{\pi\times 6{,}674\cdot 10^{-11}\, m^3\, s^{-2} kg^{-1} \times 1{,}99\cdot 10^{30}\, kg}\sqrt{\frac{1}{27\times 8}}\frac{M_\odot}{M_{ZG}} \approx 4400\; Hz \times \frac{M_\odot}{M_{ZG}} = 4{,}4\; kHz \times \frac{M_\odot}{M_{ZG}}$$

Vraag 4.
a) Hiervoor (vraag 1) werd reeds de frequentie f_0 van de gravitatiegolf vlak voor de botsing bepaald. Op basis van de resultaten van de vorige vragen (vraag 2 en vraag 3), welk soort objecten komen dan al dan niet in aanmerking als centraal object (hoofdreeksster, witte dwerg, neutronenster, zwart gat) bij de botsing die aanleiding heeft gegeven tot de waargenomen gravitatiegolf op 14 september 2015?

Als frequentie vlak voor de botsing hebben we hierboven gevonden dat

$$f_0 = 142{,}86\; Hz$$

Op basis van bovenstaande analyse wordt duidelijk dat deze waarde niet kan bereikt worden met gewone sterren, witte dwergen of neutronensterren; enkel zwarte gaten komen in aanmerking.

b) Maak een schatting voor de massa M_{obj} van dit centrale object (uitgedrukt in M☉).

Aangezien

$$f_{ZG} \approx 4400\; Hz \times \frac{M_\odot}{M_{ZG}}$$

bekomen we dat

$$M_{ZG} \approx 4400\; Hz \times \frac{M_\odot}{f_{ZG}} = \frac{4400\; Hz}{142{,}86\; Hz} M_\odot \approx 31\; M_\odot$$

(Waarden tussen 13 M☉ en 50 M☉ worden aanvaard.)

Vraag 5.
Men heeft berekend dat bij de gebeurtenis die aanleiding heeft gegeven tot de gravitatiegolf die is waargenomen op 14 september 2015 ongeveer 3 keer de massa van de Zon is omgezet in energie. Er wordt beweerd dat dit overeenkwam met de gezamenlijke energieproductie van alle sterren in het heelal gedurende de 0,2 seconden die de gebeurtenis heeft geduurd. Verduidelijk deze bewering op kwantitatieve wijze, aan de hand van realistische schattingen en aannames.

We berekenen vooreerst hoeveel energie er geproduceerd is door de omzetting van 3 zonsmassa’s.
Dit gebeurt aan de hand van de welbekende formule:

$$E = mc^2$$

waarbij $m = 3\ M_{\odot}$.
We vinden:

$$E_{grav} = 3 \times 2 \cdot 10^{30}\ kg \times (3 \cdot 10^{8}\ ms^{-1})^{2} = 5{,}4 \cdot 10^{47}\ J$$

Voor het vervolg van deze vraag maken we een schatting van het aantal sterrenstelsels in het heelal en het aantal sterren per sterrenstelsel.
Het Melkwegstelsel telt naar schatting zo'n vijfhonderd miljard sterren (voornamelijk zwakke, rode dwergsterren, maar toch). In het waarneembare heelal komen ruwweg zo'n honderd miljard sterrenstelsels voor. Die zijn niet allemaal even groot als ons eigen Melkwegstelsel. Als we voor het gemak aannemen dat een gemiddeld sterrenstelsel honderd miljard sterren telt, dan zijn er in het waarneembare heelal dus honderd miljard keer honderd miljard sterren.
Het vermogen van de Zon bedraagt ongeveer $3{,}8 \cdot 10^{26}$ watt en we nemen even aan dat dit overeenkomt met de gemiddelde energieproductie van een ster.
De totale energieproductie van de sterren in het waarneembare heelal gedurende 0,2 seconden bedraagt dan:

$$E_{sterren} = 10^{11} \times 10^{11} \times 3{,}8 \cdot 10^{26} W \times 0{,}2 s = 7{,}6 \cdot 10^{47}\ J$$

Dit ligt dus volledig in dezelfde orde van grootte als de energie die geproduceerd werd door de gravitatiegolf.
Alle getallen blijven benaderingen die gebaseerd zijn op modellen.

Dit is het einde van de eerste ronde van
de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2017.