Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2022

Oplossingen

6 april 2022

In dit document worden oplossingen voorgesteld voor de vragen van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2022. Het spreekt voor zich dat andere methodes eventueel ook tot correcte oplossingen kunnen leiden.

Vlaamse Sterrenkunde Olympiade
Vereniging Voor Sterrenkunde
Zeeweg 96
8200 Brugge

Het organiserend comité van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2022: Robin Baeyens (KU Leuven), Jelle Dhaene (Cozmix), Silke Maes (KU Leuven), Frank Tamsin (VVS), Bert Vander Meulen (UGent).

http://www.sterrenkundeolympiade.be
info@sterrenkundeolympiade.be

Meerkeuze vragenreeks

1. We vergelijken de afstand tot de horizon voor een waarnemer op de top van de Mount Everest (op 8,8 km) op Aarde, met die voor een waarnemer op de top van Olympus Mons (op 25 km hoogte) op Mars. Welk van volgende waarden benadert de verhouding tussen beide afstanden het best?

a) 0,1
b) 1
c) 5
d) 10
e) Er is onvoldoende informatie om dit te kunnen berekenen.

Zij R de straal van de planeet en h de hoogte van de berg, dan kan de afstand D tussen de horizon en het oog van de waarnemer, in rechte lijn, berekend worden als

$$D = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2hR + h^2}$$

Voor de situatie bij de Mount Everest is R = 6371 km en h = 8,8 km, zodat D ≈ 335 km.
Voor de Olympus Mons op Mars geldt dat R = 3390 km en h = 25 km, zodat D ≈ 412 km.

2. Op de afbeelding hiernaast van een gedeelte van de sterrenhemel zijn drie Messier-objecten omcirkeld.

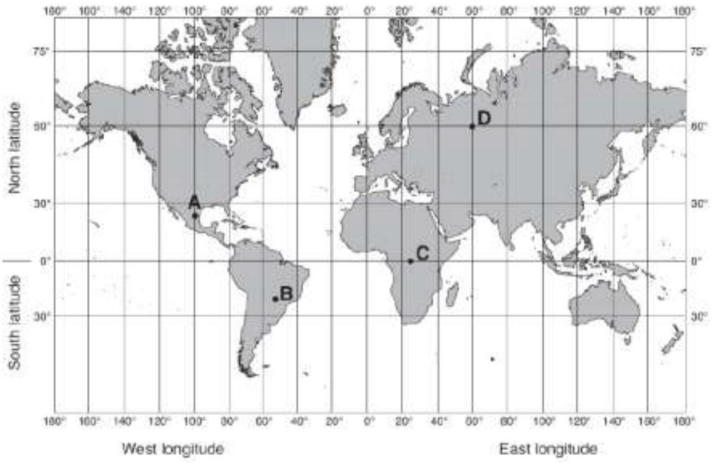


Kies het alternatief dat correct overeenkomt met elk object met zijn type:

a)	(1) Open sterrenhoop	(2) Open sterrenhoop	(3) Nevel
b)	(1) Open sterrenhoop	(2) Nevel	(3) Sterrenstelsel
c)	(1) Sterrenstelsel	(2) Nevel	(3) Bolvormige sterrenhoop
d)	(1) Open sterrenhoop	(2) Sterrenstelsel	(3) Bolvormige sterrenhoop
e)	**(1) Open sterrenhoop**	**(2) Nevel**	**(3) Open sterrenhoop**

Het sterrenbeeld Orion is duidelijk te herkennen op de afbeelding. Dan vindt men verder ook gemakkelijk dat object 1 de open sterrenhoop de Plejaden (Messier 45) in het sterrenbeeld Stier is, object 2 is de Krabnevel (Messier 1) in de Stier en object 3 is de open sterrenhoop Messier 35 in de Tweelingen.

3. Welke plaats (weergegeven op de kaart) kent op 21 maart 12 uur daglicht en 12 uur nacht?
a) A.
b) B.
c) C.
d) Zowel A, B als C.
e) Noch A, noch B, noch C.



Dag en nacht duren op de eerste lentedag overal ter wereld even lang

4. We onderscheiden drie vormen van schemering:
- De burgerlijke schemering als het middelpunt van de Zon minder dan x° onder de horizon staat; we kunnen dan reeds de helderste sterren zien en het wordt moeilijk om te lezen zonder kunstlicht.
- De nautische schemering als het middelpunt van de Zon x° tot y° onder de horizon staat; het wordt te donker om de zeehorizon nog te zien zodat hoogtemetingen voor de scheepvaart niet meer mogelijk zijn met de horizon als referentie.
- De astronomische schemering als het middelpunt van de Zon y° tot z° onder de horizon staat; er is nog wat verstrooiing van zonlicht waardoor het nog niet perfect donker is voor astronomische waarnemingen.

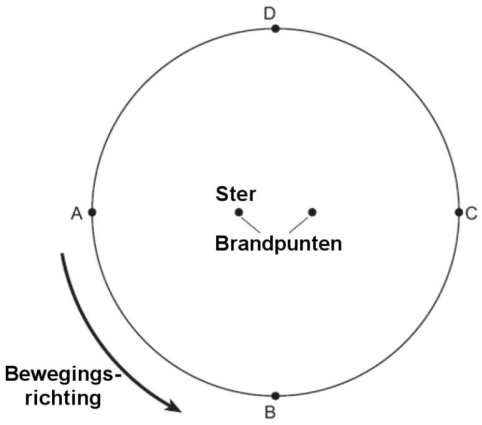
Wat zijn de waarden voor x, y en z in bovenstaande beschrijving?

a)	x = 5	y = 10	z = 15.
b)	**x = 6**	**y = 12**	**z = 18.**
c)	x = 3	y = 6	z = 9.
d)	x = 12	y = 6	z = 18.
e)	x = 10	y = 20	z = 30.

Er worden in het algemeen drie hoofdgradaties van schemering onderscheiden:
- de burgerlijke of civiele schemering, als het middelpunt van de Zon minder dan 6° onder de horizon staat;
- de zeevaartkundige of nautische schemering, als het middelpunt van de Zon 6° tot 12° onder de horizon staat; nautische schemeringen brengen in juni en juli vaak lichtende nachtwolken met zich mee;
- de astronomische schemering, als het middelpunt van de Zon 12° tot 18° onder de horizon staat; daardoor is op een zeker moment geen verstrooiing van het zonlicht meer te zien.

Staat de Zon meer dan 18° onder de horizon, dan is de hemel volledig donker; dit is de astronomische duisternis.

5. De figuur rechts geeft schematisch de beweging weer van een planeet op een elliptische baan rond een ster. Wat is ongeveer de excentriciteit van deze elliptische baan (afgerond tot 1 cijfer na de komma)?
a) 0,0
b) 0,1
c) 0,2
d) 0,3
e) 0,4



Noemen we a de lengte van de halve lange as AC en q de kortst mogelijke afstand tussen de ster en de planeet (de zogenaamde periastronafstand), dan kan de excentriciteit e afgeleid worden uit het verband

$$q = a(1 - e)$$

De gemeten waarden voor q en a hangen uiteraard af van de schaal van de afdruk, maar de verhouding is wel vast.

6. Komeet C/2020 F3 (NEOWISE) bereikte voor het laatst haar perihelium op 3 juli 2020. Deze komeet heeft een omlooptijd van 4400 jaar en de baanexcentriciteit bedraagt 0,99921. Hoe groot is de periheliumafstand van komeet C/2020 F3 (NEOWISE), uitgedrukt in AE (astronomische eenheden)?
a) 0,0123 AE
b) 0,212 AE
c) 0,424 AE
d) 2,69 AE
e) 26,8 AE

Zij P de periode van de komeet uitgedrukt in jaar en a de lengte van de halve lange baanas uitgedrukt in AE, dan kan de derde wet van Kepler uitgedrukt worden via het eenvoudige verband:

$$P^2 = a^3$$

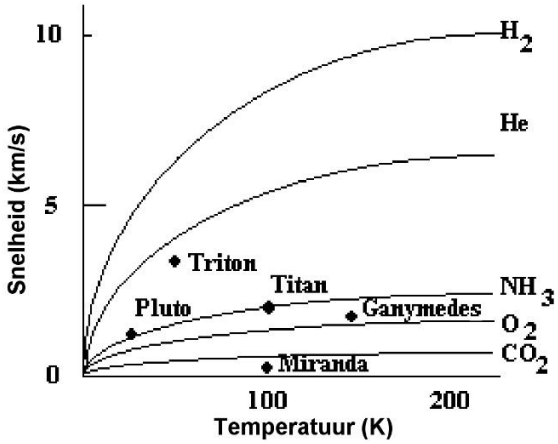
zodat uit de gegeven waarde P de waarde voor a kan afgeleid worden. De periheliumafstand q kan dan verder berekend worden uit:

$$q = a(1 - e)$$

7. Welk van volgende objecten is géén dwergplaneet?
a) Ceres
b) Eris
c) Makemake
d) Pluto
e) Juno

De planetoïde Juno is geen dwergplaneet.

8. De figuur rechts zet voor verschillende objecten in het zonnestelsel hun ontsnappingssnelheid in km/s (op de verticale as) uit tegenover hun oppervlaktetemperatuur in K (op de horizontale as). Op dezelfde figuur geven de getekende lijnen de gemiddelde snelheid van gasdeeltjes weer in functie van de temperatuur, en dit voor verschillende gassen. Welke van de gassen die in dit diagram zijn getekend, zouden door Miranda kunnen worden vastgehouden?



a) alleen CO_2;
b) alleen NH_3;
c) zowel CO_2, NH_3 als O_2;
d) alle gassen die op de figuur zijn weergegeven;
e) geen enkele van de weergegeven gassen.

De ontsnappingssnelheid op Miranda is lager dan de gemiddelde snelheid van de gasdeeltjes voor elk van de aangegeven gassen.

9. Wat is het theoretisch oplossend vermogen (beperkt door diffractie) van een typische 20 cm amateurtelescoop bij visueel licht (van golflengte 550 nm)?
a) 0,35 boogseconden
b) 0,69 boogseconden
c) 0,017 boogseconden
d) 1,7 boogseconden
e) 6,9 boogseconden

Het oplossend vermogen θ (uitgedrukt in radialen) van een telescoop met diameter *D* voor licht van golflengte λ, kan berekend worden uit

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Men dient dan enkel deze waarde nog om te zetten in boogseconden (een radiaal is 206265 boogseconden). Let uiteraard op het gebruik van de juiste eenheden!

10. Hoeveel magnitudes verschilt de grensmagnitude van een 200 mm telescoop met die van het menselijk oog; neem daarbij aan dat de diameter van de iris 5 mm bedraagt. (Een verschil van 5 magnitudes komt overeen met een factor 100 in helderheid.)
a) 6,0.
b) 7,0.
c) 8,0.
d) 9,0.
e) 10,0.

De telescoop kan een factor $(200 / 5)^2 = 1600$ meer licht opvangen dan het menselijk oog. In magnitudes uitgedrukt vertaalt zich dit naar $2{,}5 \cdot \log(1600)$.

11. Wat is géén significant voordeel van het observeren met een ruimtetelescoop?
a) De afstand tussen waargenomen objecten en de telescoop is kleiner.
b) Straling bereikt de telescoop zonder dat die door de atmosfeer van de Aarde wordt geabsorbeerd.
c) De telescoop wordt niet beïnvloed door lokale bronnen van straling.
d) De straling wordt niet verbogen door turbulentie in de atmosfeer.
e) Alle bovenstaande zaken zijn wel degelijk significant.

De afstand tussen de telescoop en het aardoppervlak is absoluut verwaarloosbaar ten opzichte van de afstanden van de waargenomen objecten zelf.

12. In vergelijking met röntgenstraling hebben radiogolven
a) een hogere frequentie en een hogere energie.
b) een lagere frequentie en een lagere energie.
c) een hogere frequentie en een lagere energie.
d) een lagere frequentie en een hogere energie.
e) Dit is misleidend aangezien alle gebieden in het elektromagnetisch spectrum dezelfde energie en frequentie hebben, en alleen verschillen in golflengte.

Radiogolven hebben een lange golflengte λ en dus een lage frequentie ν. Energie E en frequentie ν staan lineair met elkaar in verband volgens de formule van Planck $E = h\nu$, waarbij h de constante van Planck is.

13. Wat is het spectraaltype van een ster met een lichtkracht van $5{,}86 \cdot 10^{26}$ W en een straal van $8{,}51 \cdot 10^{8}$ m?
a) A
b) F
c) G
d) K
e) M

De wet van Stefan-Boltzmann geeft het verband tussen de lichtkracht L van een zwarte straler, en de straal R en de temperatuur T_{eff} ervan, volgens

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

waarbij $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} de constante van Stefan-Boltzmann (of eerste stralingsconstante) is.
Hiermee vinden we $T_{eff} = 5805\ K$, wat overeenkomt met spectraaltype G.

14. Wat is de piekgolflengte van de elektromagnetische straling die wordt uitgezonden door een ster met een effectieve temperatuur van 10000 K. De ster mag daarbij als een zwarte straler beschouwd worden.
a) 29 nm
b) 290 nm
c) 580 nm
d) 2900 nm
e) 5800 nm

De piekgolflengte λ en de effectieve temperatuur T staan met elkaar in verband volgens de verschuivingswet van Wien: $\lambda_{max}.T = b$ waarbij b = 2,897756·10^{-3} K·m.

15. Een normale neutronenster kan een massa hebben van 1,4 zonsmassa's en een straal van 12 km. Als we de Maan zouden comprimeren tot dezelfde gemiddelde dichtheid als deze neutronenster, wat zou haar resulterende straal dan zijn?
a) 3570 cm
b) 0,352 km
c) 2,033 mm
d) 3012 km
e) 3 cm

Zij M en m de respectieve massa's van de neutronenster en van de Maan, en zij R en r hun respectieve stralen. We drukken uit dat gemiddelde dichtheid dezelfde is:

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Hieruit volgt dat

$$r = \sqrt[3]{\frac{m}{M}}\, R$$

waarbij $M = 1{,}4\ M_\odot = 1{,}4 \times 1{,}989\ \times 10^{30}$ kg en $m = 7{,}35\ \times 10^{22}$ kg en verder $R = 12$ km.

16. Wat is de dominante fusie-reactie in hoofdreekssterren met grote massa?
a) De proton-proton keten.
b) De CNO cyclus.
c) De helium-helium keten.
d) De proton-proton III keten.
e) Geen van bovenstaande.

De andere fusiereacties zijn ofwel dominant in sterren met kleinere massa of zijn niet van toepassing tijdens de hoofdreeksfase van sterren.

17. Wat is bij benadering de oppervlaktetemperatuur van O-sterren?
a) 3 K.
b) 30 K.
c) 300 K.
d) 3000 K.
e) 30000 K.

De andere opgegeven temperaturen zijn ofwel te laag om voor te komen als oppervlaktetemperatuur van een ster, of eerder typisch voor M-sterren.

18. Wat weerhoudt een witte dwerg ervan om in te storten tot een zwart gat?
a) De zeer sterke ontaardingsdruk van elektronen.
b) De splitsing van complexe elementen geeft warmte vrij.
c) De fusie van complexe elementen genereert warmte.
d) De zeer sterke ontaardingsdruk van neutronen.
e) Niets, want uiteindelijk zal een witte dwerg toch instorten tot een zwart gat.

Complexe elementen zijn niet van belang in witte dwergen; neutronen zijn typisch voor neutronensterren.

19. De kleur van een ster staat het meest rechtstreeks in verband met
a) de massa.
b) de oppervlaktetemperatuur.
c) de centrale temperatuur (dus in de kern van de ster).
d) de lichtkracht.
e) de straal.

Dit wordt uitgedrukt door de verschuivingswet van Wien.

20. Een astronoom neemt een zonachtige ster waar met een schijnbare visuele magnitude van 6,73. Ervan uitgaande dat de gemiddelde interstellaire extinctie (op de waargenomen golflengte) 1,00 magnitude per kiloparsec bedraagt, hoe groot is dan de afstand van de waargenomen ster, uitgedrukt in parsec (pc).
a) 11,5 pc
b) 49,5 pc
c) 34,2 pc
d) 23,7 pc
e) 18,9 pc

Het verband tussen de absolute magnitude M, de schijnbare visuele magnitude m, de afstand d (in parsec) en de interstellaire extinctie a_V wordt gegeven door volgende formule:

$$M = m + 5 - 5\log d^{(pc)} - a_V \cdot d$$

Voor een zonachtige ster is $M = 4{,}83$ en er is gegeven dat $a_V = 10^{-3}$ magitude/pc, zodat we vinden

$$4{,}83 = 6{,}73 + 5 - 5\log d^{(pc)} - 10^{-3} \cdot d$$

of nog

$$6{,}9 = 5\log d^{(pc)} + 10^{-3} \cdot d$$

Deze vergelijking is niet analytisch oplosbaar, maar kan bijvoorbeeld iteratief opgelost worden door omvorming van de formule tot

$$d = 10^{\frac{6{,}9 - 10^{-3} \cdot d}{5}}$$

21. Een astronoom bestudeert het spectrum van een ver verwijderde bron. Ze neemt hierbij enkel zeer heldere lijnen waar. Wat is wellicht de oorzaak van dit fenomeen?

a) Een gaswolk van lage dichtheid wordt aan het lichten gebracht door een ster in de nabijheid van de gaswolk, maar die zich niet langs de gezichtslijn van de waarneemster bevindt.

b) Een interstellaire wolk die enkel volledig geïoniseerd waterstof bevat.

c) Een gaswolk van lage dichtheid wordt aan het lichten gebracht door een ster in de nabijheid van de gaswolk, en waarbij zowel de gaswolk als de ster zich langs de gezichtslijn van de waarneemster bevinden.

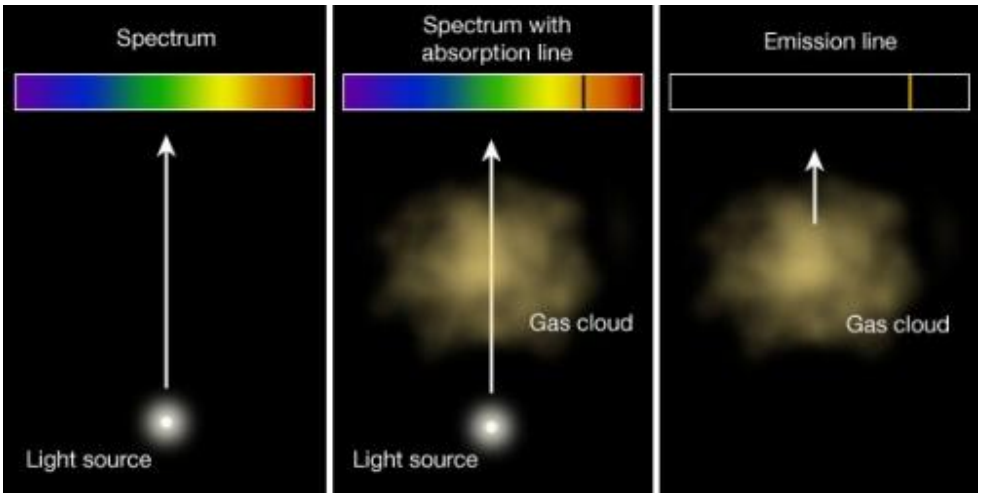
d) Zij kijkt naar de Maan.

e) Een interstellaire wolk die volledig uit elektronen bestaat.

In de begindagen van spectroscopie onthulden experimenten dat er drie hoofdtypen spectra waren. De verschillen in deze spectra en een beschrijving van hoe ze te creëren werden samengevat in drie wetten van Kirchhoff:

- Een lichtgevende vaste stof, vloeistof of dicht gas zendt licht uit van alle golflengten.
- Een heet gas met lage dichtheid dat tegen een koelere achtergrond wordt gezien, zendt een spectrum met emissielijnen uit.
- Een koel gas met lage dichtheid voor een hetere bron van een continu spectrum creëert een spectrum met absorptielijnen.

Deze wetten worden schematisch samengevat in onderstaande figuur.



22. De exoplaneet HD 209458b heeft een massa van 0,71 Jupitermassa's en draait om HD 209458 met een omlooptijd van 3,53 dagen. HD 209458 heeft een massa van 1,15 zonsmassa's. Ervan uitgaande dat de baan van HD 209458b cirkelvormig is (wat hier een goede benadering is) en dat zijn baan perfect in onze gezichtslijn ligt, wat is dan de radiale snelheid (in m/s) van HD 209458 als gevolg van de baanbeweging van HD 209458b?
a) 42,7 m/s
b) 69,6 m/s
c) 85,9 m/s
d) 94,2 m/s
e) 120,8 m/s

Als *P* de periode voorstelt, *a* de lengte van de halve lange baanas, *M* de massa van de ster en *m* de massa van de exoplaneet, dan luidt de derde wet van Kepler

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

met G de universele gravitatieconstante of constante van Cavendish. Aangezien gegeven is dat $m<<M$ mogen we m verwaarlozen, vinden we $a \approx 7{,}12 \cdot 10^9\ m$.
In de veronderstelling van een cirkelvormige baan, kan de baansnelheid v_p van de exoplaneet kan berekend worden als

$$v_p = \frac{2\pi a}{P}$$

wat leidt tot $v_p \approx 146780\ m/s$.
We maken nu verder gebruik van het behoud van hoekmoment

$$M \cdot v_{rad} = m \cdot v_p$$

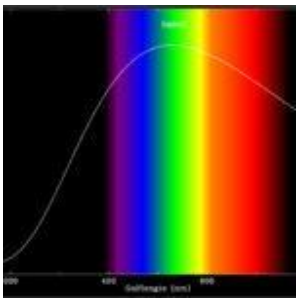
waarbij v_{rad} de gegeven radiële snelheid voorstelt.
Aldus vinden we

$$v_{rad} = \frac{m}{M} \cdot v_p \approx 85{,}9\ m/s$$

23. Welke van volgende stellingen is correct?
a) Er bestaan geen groene sterren.
b) Het noorderlicht wordt veroorzaakt door de botsing tussen het magnetisch veld van de Zon en dat van de Aarde.
c) Sterren met een massa kleiner dan 10 zonsmassa's kunnen geen elementen zwaarder dan ijzer synthetiseren.
d) Theoretisch gezien kunnen sterren oneindig groot worden.
e) Hoe verder men kijkt, hoe verder men terugkijkt in de tijd. Men kan dus, met een telescoop die sterk genoeg is, terugkijken tot aan de big bang.

Ruwweg geldt dat sterren de kleur hebben van de golflengte van het licht waarbij het Planckspectrum voor hun oppervlaktetemperatuur een maximum bereikt. Zo zien we dus dat koele sterren rood zijn, minder koele sterren oranje, en via geel komen we zo uiteindelijk bij blauw terecht. Een uitzondering hierop vormt groen: er bestaan geen groene sterren! Als we naar figuur kijken, zouden we verwachten dat het maximum van de grafiek voor een oppervlaktetemperatuur van ongeveer 5500K (ongeveer zoals de Zon dus), in het groene deel van

het spectrum zou moeten liggen. Dat is in werkelijkheid ook inderdaad het geval, zie de figuur hiernaast (voor een temperatuur van 5400K). Vervolgens zouden we ons kunnen baseren op de bewering van hierboven, dat de kleur van zo'n ster groen zou moeten zijn. En dat klopt dus niet. De reden hiervoor is als volgt. Als we naar de figuur kijken, zien we dat groen ongeveer in het midden van het zichtbare spectrum ligt. Het gevolg is dat het Planckspectrum weliswaar vooral groen licht bevat, maar daarnaast niet alleen bijdragen heeft van de kortere golflengtes (zoals een rode ster) of alleen bijdragen van de langere golflengtes (zoals een blauwe ster). In het geval van deze ster komen de bijdragen van beide kanten. Zo'n beetje alle kleuren van de regenboog (letterlijk) komen dus voor in het licht van een 'groene' ster. En hoe noemen we de kleur die een mix is van alle kleuren van de regenboog? Dat noemen we wit. Sterren die het felst zijn in het groene deel van het spectrum, zijn dus niet groen, maar wit!



24. In het jaar 1006 werd door astronomen over de hele wereld een nieuwe ster waargenomen die een visuele magnitude van –7,5 had, ongeveer 16 keer lichtkrachtiger dan Venus. Nu weten we dat dit waarschijnlijk een type Ia supernova was met een absolute magnitude van –19,3. De diameter van het supernovarestant heeft een hoekgrootte van 30 boogminuten. Hoe groot is dan de expansiesnelheid van het gas dat door de exploderende ster is uitgestoten?

a) $1{,}9 \times 10^4$ km s^{-1}
b) $1{,}2 \times 10^2$ km s^{-1}
c) $9{,}6 \times 10^3$ km s^{-1}
d) $4{,}8 \times 10^3$ km s^{-1}
e) $4{,}5 \times 10^1$ km s^{-1}

Uit de afstandsformule $M = m + 5 - 5\log d^{(pc)}$ halen we dat

$$d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{-7{,}5+19{,}3+5}{5}} = 2291\ pc$$

Voor een object met ruimtelijke diameter D op afstand d is de hoekdiameter α in radialen

$$\alpha = \frac{D}{d}$$

Via omzetting van de hoekdiameter van boogminuten naar radialen, vinden we de diameter D van het object, en vervolgens ook de straal R als

$$R = \frac{D}{2} \approx 10\ pc$$

De expansiesnelheid v kan dan gevonden worden als

$$v = \frac{R}{\Delta T} \approx \frac{10}{2022-1006}\ \frac{pc}{jaar} = \frac{10 \times 3{,}086 \cdot 10^{16}}{(2022-1006) \times 31556926}\ \frac{m}{s} \approx 9625\ km/s$$

25. Zet de volgende omgevingen in volgorde van toenemende dichtheid:
(1) een moleculaire wolk
(2) de interstellaire ruimte
(3) de interplanetaire ruimte
(4) de intergalactische ruimte
(5) de corona van de Zon
(6) het sterkste vacuüm bereikt in laboratoria op Aarde

a) 4 – 2 – 3 – 1 – 6 – 5
b) 6 – 4 – 2 – 3 – 5 – 1
c) 3 – 2 – 6 – 4 – 5 – 1
d) 4 – 6 – 2 – 3 – 1 – 5
e) 2 – 3 – 6 – 5 – 4 – 1

Men kan de dichtheden opzoeken, maar op zich vormt het een logische sequentie.

26. De karakteristieke baanperiode van een contactdubbelster bestaande uit twee zonachtige sterren bedraagt ongeveer
a) 2 uur
b) 3 uur
c) 5 uur
d) 7 uur
e) 1 jaar

Als P de periode voorstelt, a de lengte van de halve lange baanas, M de massa van de eerste ster en m de massa van de tweede ster, dan kan de baanperiode afgeleid worden uit de derde wet van Kepler

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

met G de universele gravitatieconstante of constante van Cavendish. Aangezien gegeven is dat $M = m = 2 \cdot 10^{30}\ kg$ vinden we dat $P = 7124$ seconden.

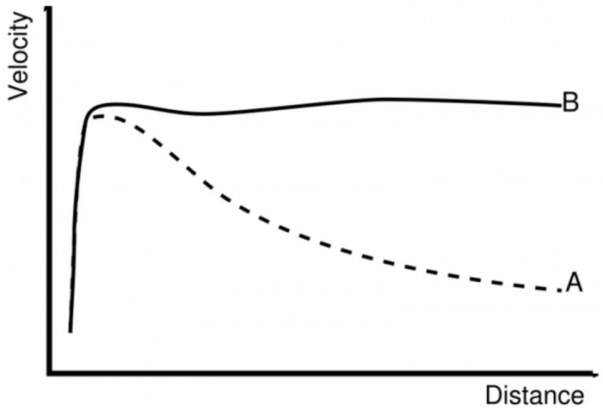
27. Het centrum van ons Melkwegstelsel is aan de hemel te zien in het sterrenbeeld
a) Tweelingen
b) Boogschutter
c) Schorpioen
d) Kreeft
e) Maagd

In het centrum van de Melkweg bevindt zich hoogstwaarschijnlijk een superzwaar zwart gat, Sagittarius A*.

28. Welke van de onderstaande combinaties van grootheden beschrijft een zwart gat en al zijn eigenschappen?
a) massa, rotatie en magnetisch veld
b) massa, straal en rotatie
c) massa, elektrische lading en rotatie
d) massa, straal en elektrische lading
e) elektrische lading en rotatie

Het zogenaamde 'no hear theorem' stelt dat alle zwarte gat-oplossingen van de Einstein-Maxwell-vergelijkingen van zwaartekracht en elektromagnetisme in de algemene relativiteitstheorie volledig kunnen worden gekarakteriseerd door slechts drie extern waarneembare klassieke parameters: massa, elektrische lading en impulsmoment. Alle andere informatie (waarvoor 'haar' een metafoor is) over de materie die een zwart gat heeft gevormd of erin valt, 'verdwijnt' achter de gebeurtenishorizon van het zwart gat en is daarom permanent ontoegankelijk voor externe waarnemers. Natuurkundige John Archibald Wheeler drukte dit idee uit met de uitdrukking "zwarte gaten hebben geen haar", wat de oorsprong van de naam was.

29. De afbeelding toont de verwachte (A) en de waargenomen (B) rotatiecurven van een spiraalstelsel. Wat is de meest gangbare verklaring om dit verschil te verklaren?
a) Baryonen.
b) Neutrino's.
c) Gammastraling.
d) Donkere materie.
e) Bolvormige sterrenhopen.



Meer informatie hierover is bijvoorbeeld te vinden op https://www.wikiwand.com/en/galaxy_rotation_curve.

30. Welke zijn de twee eigenschappen van een sterrenstelsel waartussen de Tully-Fisher relatie een verband beschrijft?
a) Lichtkracht en snelheidsdispersie.
b) Lichtkracht en rotatiesnelheid.
c) Straal en metalliciteit.
d) Lichtkracht en metalliciteit.
e) Massa en oppervlaktehelderheid.

De Tully-Fisher-relatie is een empirische relatie tussen de massa, of de intrinsieke lichtkracht van een spiraalvormig sterrenstelsel en zijn asymptotische rotatiesnelheid, of de breedte van zijn emissielijnen. De relatie werd voor het eerst gepubliceerd in 1977 door de astronomen R. Brent Tully en J. Richard Fisher.

1.	B
2.	E
3.	D
4.	B
5.	C
6.	B
7.	E
8.	E
9.	B
10.	C

11.	A
12.	B
13.	C
14.	B
15.	A
16.	B
17.	E
18.	A
19.	B
20.	D

21.	A
22.	C
23.	A
24.	C
25.	A
26.	A
27.	B
28.	C
29.	D
30.	B

Open vragenreeks I: massabepaling in het heelal

Bij de vragen hieronder kan gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

Massa van de Zon: $M_{zon} = M_{\odot} = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg

Universele gravitatieconstante: $G = 6{,}67408 \times 10^{-11}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$

Lichtjaar: $1\ lj = 9{,}641 \times 10^{12}\ km$

Vraag 1: massa van sterrenstelsels.

De massa van een sterrenstelsel is veel groter dan de massa van om het even welke individuele ster of gaswolk die zich er in bevindt. Dit wil zeggen dat we Newtons versie van de derde wet van Kepler kunnen gebruiken om de massa van het sterrenstelsel binnen de baan van een ster te berekenen. We gebruiken deze wet in de volgende vorm, die geldig is als één object (het sterrenstelsel) veel massiever is dan het andere object (de individuele ster)

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

waarbij M de massa van het sterrenstelsel (binnen de baan van de ster) voorstelt, P en a respectievelijk de omwentelingsprediode en de lengte van de halve grote as van de baan van de ster voorstellen, en G de universele gravitatieconstante is.

a) Toon aan dat de massa M_r van een sterrenstelsel binnen een bepaalde straal r geschreven kan worden als

$$M_r = \frac{rv^2}{G}$$

Hierbij is v de baansnelheid van een object op een afstand r van het centrum van het sterrenstelsel. Ga ervan uit dat de objecten op cirkelvormige banen bewegen rondom het centrum van het sterrenstelsel.

De gegeven vergelijking kan omgevormd worden naar

$$M = \frac{4\pi^2a^3}{GP^2}$$

Als we ervan uitgaan dat de objecten zich op een cirkelvormige baan bewegen rondom het centrum van het sterrenstelsel, dan kunnen we de baanperiode P uitdrukken in functie van de straal a van de baan als

$$P = \frac{2\pi a}{v}$$

waarbij v de baansnelheid van het object voorstelt. Als we dit invullen in de vorige uitdrukking, dan bekomen we

$$M = \frac{4\pi^2a^3v^2}{G4\pi^2a^2} = \frac{av^2}{G}$$

Voor een cirkelvormige baan is de lengte a van de halve grote as natuurlijk niets anders dan de straal r van de cirkel, zodat uiteindelijk

$$M_r = \frac{rv^2}{G}.$$

b) De Zon beschrijft een baan rondom het centrum van ons Melkwegstelsel met een snelheid van 220 km/s en bevindt zich op een afstand van 28000 lichtjaar van het centrum ervan. Wat is de massa van ons Melkwegstelsel binnen de baan die onze Zon beschrijft?
Druk je antwoord uit in zonsmassa's ($M_\odot$).

De straal van de baan van de Zon kan geschreven worden als

$$r_{zon} = 28000 \times 9{,}641 \cdot 10^{12}\ km = 2{,}699 \cdot 10^{20} m.$$

We kunnen de massa binnen de baan van de Zon dan schrijven als

$$\begin{aligned} M_{r,\odot} &= \frac{rv^2}{G} \\ &= \frac{2{,}699 \cdot 10^{20} \times (220 \cdot 10^3)^2}{6{,}67408 \cdot 10^{-11}}\ kg \\ &= 1{,}957 \cdot 10^{41}\ kg \\ &= 9{,}839 \cdot 10^{10}\ M_\odot \end{aligned}$$

c) Van een nabijgelegen spiraalstelsel wordt een rotatiecurve opgesteld en deze toont aan dat objecten die zich op 150 000 lichtjaar van het centrum bevinden een snelheid hebben van 216 km/s. Wat is de massa dit sterrenstelsel?
Druk je antwoord uit in zonsmassa's ($M_\odot$).

De straal van de baan van objecten op een afstand van 150000 lichtjaar kan geschreven worden als

$$r_{spiraal} = 150000 \times 9{,}641 \cdot 10^{12}\ km = 1{,}446 \cdot 10^{21} m.$$

We kunnen de massa binnen de baan van de Zon dan schrijven als

$$\begin{aligned} M_{spiraal} &= \frac{1{,}446 \cdot 10^{21} \times (216 \cdot 10^3)^2}{6{,}67408 \cdot 10^{-11}} \\ &= 1{,}011 \cdot 10^{42}\ kg \\ &= 5{,}083 \cdot 10^{11}\ M_\odot \end{aligned}$$

De massa-lichtkrachtverhouding (M/L) van een object is de totale massa van het object (uitgedrukt in zonsmassa's) gedeeld door de totale lichtkracht (uitgedrukt in zonslichtkrachten). De massa-lichtkrachtverhouding voor de Zon wordt dus gegeven door

$$\frac{M}{L} = \frac{1\ M_\odot}{1\ L_\odot} = 1\frac{M_\odot}{L_\odot}.$$

d) Wat is de massa-lichtkrachtverhouding van ons Melkwegstelsel binnen de baan van de Zon? De totale lichtkracht van alle sterren binnen deze baan bedraagt $1{,}5 \times 10^{10} L_\odot$.

Voor ons Melkwegstelsel geldt dat

$$\frac{M_{r,\odot}}{L} = \frac{9{,}839 \cdot 10^{10}}{1{,}5 \cdot 10^{10}} \frac{M_\odot}{L_\odot} = 6{,}6 \frac{M_\odot}{L_\odot}$$

e) Als het hoger vermelde spiraalstelsel (uit vraag c) eenzelfde totale lichtkracht zou hebben, wat is dan de massa-lichtkrachtverhouding van dit sterrenstelsel?
Wat kun je besluiten als je dit vergelijkt met het resultaat voor ons eigen Melkwegstelsel?

Voor dat spiraalstelsel zou dan gelden dat

$$\frac{M_{spiraal}}{L} = \frac{5{,}083 \cdot 10^{11}}{1{,}5 \cdot 10^{10}} \frac{M_\odot}{L_\odot} = 33{,}9 \frac{M_\odot}{L_\odot}$$

Het spiraalstelsel heeft dus een massa-lichtkrachtverhouding die ongeveer 5 maal groter is dan de massa-lichtkrachtverhouding van ons Melkwegstelsel binnen de baan van onze Zon. We kunnen hieruit besluiten dat de massa in dit spiraalstelsel een stuk minder helder is dan de massa die gevonden wordt in de binnenste regionen van ons Melkwegstelsel. Dit duidt er dus op dat het spiraalstelsel heel wat massa moet bevatten die weinig tot geen licht uitzendt.

Vraag 2: massa van clusters.
Een cluster van sterrenstelsels heeft een straal van 6,2 miljoen lichtjaar. Metingen van de dopplerverschuiving in het spectrum van de sterrenstelsels tonen aan dat de sterrenstelsels met een snelheid van 1350 km/s rondom het centrum van de cluster bewegen.

a) Bepaal de massa van de cluster aan de hand van de orbitale snelheid (= baansnelheid) van de sterrenstelsels. Druk je antwoord uit in zonsmassa's ($M_\odot$).
Vergelijk deze massa met de massa van ons eigen Melkwegstelsel $\left(10^{12} M_\odot\right)$.

Hiervoor kunnen we rechtstreeks de orbitale snelheidswet gebruiken. De straal van de cluster wordt gegeven door

$$r_{cluster} = 6{,}2 \cdot 10^6 \times 9{,}641 \cdot 10^{12}\ km = 5{,}977 \cdot 10^{22} m.$$

We kunnen de massa binnen de baan van de Zon dan schrijven als

$$\begin{aligned} M_{cluster} &= \frac{5{,}977 \cdot 10^{22} \times \left(1350 \cdot 10^3\right)^2}{6{,}67408 \cdot 10^{-11}}\ kg \\ &= 1{,}632 \cdot 10^{45}\ kg \\ &= 8{,}205 \cdot 10^{14}\ M_\odot \end{aligned}$$

Om de massa van een cluster van sterrenstelsels te bepalen kan ook gebruikgemaakt worden van de radiële snelheid van het hete gas dat aanwezig is in de cluster. De formule voor de gemiddelde radiële snelheid v_H (uitgedrukt in m/s) van de waterstofkernen in het gas wordt gegeven door

$$v_H = 140 \times \sqrt{T}$$

waarbij T de temperatuur (uitgedrukt in K) van het gas is. Aangezien het grootste deel van het gas uit waterstofkernen bestaat, kunnen we deze formule gebruiken om de snelheid van het gas te bepalen.

b) Als je weet dat de hoger genoemde cluster gevuld is met een heet gas dat een temperatuur heeft van $9 \times 10^7\ K$, bepaal dan de massa van de cluster. Druk je antwoord uit in zonsmassa's ($M_\odot$).

We kunnen de radiële snelheid van de waterstofkernen bepalen aan de hand van de temperatuur. Deze wordt gegeven door

$$\begin{aligned} v_H &= 140 \times \sqrt{T} \\ &= 140 \left(\frac{m}{sK^{0,5}}\right) \times \sqrt{9 \cdot 10^7\ K} = 1328 \frac{km}{s} \end{aligned}$$

Opnieuw kunnen we deze snelheid gebruiken om met behulp van de orbitale snelheidswet de massa van de cluster te berekenen:

$$\begin{aligned} M_{cluster} &= \frac{5{,}977 \cdot 10^{22} \times \left(1328 \cdot 10^3\right)^2}{6{,}67408 \cdot 10^{-11}} \\ &= 1{,}579 \cdot 10^{45}\ kg \\ &= 7{,}939 \cdot 10^{14}\ M_\odot \end{aligned}$$

c) Hoe verhouden de resultaten bekomen aan de hand van de orbitale snelheid van de sterrenstelsels en aan de hand van de temperatuur van het hete gas in de cluster zich tegenover elkaar?

Beide methoden geven een gelijkaardig resultaat voor de orbitale snelheid van objecten in de cluster, en bijgevolg dus ook voor de massa van de cluster. In dit geval kunnen we dus besluiten dat beide methoden van massabepaling evenwaardig zijn. De totale massa die zich in de cluster bevindt is ongeveer 800 keer zo groot als de massa van ons eigen Melkwegstelsel $\left(10^{12} M_\odot\right)$.

Open vragenreeks II: actieve galactische kernen



Zwarte gaten zijn compacte objecten die zo zwaar zijn, dat zelfs lichtdeeltjes (fotonen) niet kunnen ontsnappen aan hun zwaartekracht. De meest massieve zwarte gaten vindt men in het centrum van sterrenstelsels, en tegenwoordig weet men dat bijna alle grote sterrenstelsels rondom ons een supermassief zwart gat herbergen. Deze supermassieve zwarte gaten kunnen een massa hebben van een miljoen tot zelfs een miljard zonsmassa's. Omdat er geen licht aan kan ontsnappen, kunnen we supermassieve zwarte gaten niet direct observeren. Wat we wel kunnen waarnemen, is de hete accretieschijf direct rondom het zwarte gat. Deze accretieschijf is enorm helder, daarom zien we uit het centrum van zo'n sterrenstelsel overmatig veel licht komen: dit is geen sterlicht, maar licht van de actieve galactische kern die de aanwezigheid van een supermassief zwart gat verraadt.

Gebruik voor het antwoord op onderstaande vragen telkens de wetenschappelijke notatie met 4 beduidende cijfers.

Vraag 1: schatting basisgrootheden.

a) Veronderstel een supermassief zwart gat van 10^9 $M_\odot$. Hoe groot is deze massa in vergelijking met alledaagse zaken zoals boodschappen uit de supermarkt? Druk je antwoord uit in *aantal pakken water (6 × 1,5 liter)*.

De massa van het zwart gat bedraagt 10^9 $M_\odot$ = $1{,}988 \cdot 10^{39}$ kg. Een pak water heeft een massa van 6 × 1,5 kg = 9 kg. De massa van het zwart gat komt dus overeen met $2{,}209 \cdot 10^{38}$ pakken water.

b) Beschouw de bijhorende actieve galactische kern. Als deze een straal heeft van 10^{-5} pc, wat is dan de straal van dit object in kilometer? Hoeveel lichtjaar is dit? In hoeveel uur leggen lichtdeeltjes zo'n afstand af?

De straal van de actieve galactische kern is 10^{-5} pc = $3{,}086 \cdot 10^8$ km = $3{,}262 \cdot 10^{-5}$ lichtjaar = 0,2859 lichtuur. De lichtdeeltjes leggen deze afstand af in 0,2859 uur.

c) Veronderstel dat ditzelfde systeem zich op een afstand van 10 Mpc van de Aarde bevindt. Welke hoek (in graden) bestrijkt deze kern dan aan de hemel?

De halve openingshoek bedraagt $\arctan(10^{-5}/10^7) = 10^{-12}$ rad = $2{,}063 \cdot 10^{-7}$ boogseconden.
De kern bestrijkt een hoek van $4{,}125 \cdot 10^{-7}$ " (=$1{,}146 \cdot 10^{-10}$ °) aan de hemel.

d) De diffractielimiet ℓ van een telescoop (in radialen) kan berekend worden uit

$$\ell = \frac{\lambda}{D}$$

met λ de golflengte van het licht dat je waarneemt, en *D* de diameter van de telescoop. Hoe groot moet de diameter van je telescoop zijn om de actieve galactische kern uit vorige deelvraag waar te nemen, wanneer je kijkt:

(1) in optisch geel licht (580 nm)?
(2) in röntgenstralen van 1 Å?
(3) in radiogolven met een frequentie van 1 GHz?

Geef de gevraagde diameter van je telescoop steeds in meter.

We nemen voor de diffractielimiet ℓ de diameter van de actieve galactische kern uit de vorige vraag.

Voor λ = 580 nm is dan $D = \frac{580\ \text{nm}}{2\times10^{-12}} = 290\ km = 2{,}9\cdot10^{5} m.$

Voor λ = 1 Å = 0,1 nm vinden we $D = \frac{0{,}1\ \text{nm}}{2\times10^{-12}} = 50\ m.$

Een frequentie van 1 GHz komt overeen met een golflengte λ = 0,2998 m zodat dan $D = \frac{0{,}2998\ \text{m}}{2\times10^{-12}} = 1{,}499\cdot10^{11}\ m \approx 1\ AE.$

Afhankelijk van de golflengte, heb je een telescoop van 290 km, 50 m of 1 astronomische eenheid nodig. Al deze maten zijn niet mogelijk. De kleinste spiegel (50 m) is voor de röntgentelescoop, maar die moet de ruimte in omdat röntgenstralen niet door de atmosfeer kunnen.

Vraag 2: extreme gravitatie.

a) Veronderstel dat een man van 90 kg zich op een afstand van 10^{-6} pc van een zwart gat (met massa 10^8 $M_\odot$) bevindt, en veronderstel dat de Newtoniaanse zwaartekrachtswet geldt. Hoe groot is de zwaartekracht dan op deze man (uitgedrukt in newton)? Hoeveel keer sterker is dit dan zijn zwaartekracht op Aarde?

Noemen we de massa's van de man en van het zwart gat respectievelijk *m* en *M*, en zij *r* hun onderlinge afstand, dan bekomen we met de algemene gravitatiewet van Newton als zwaartekracht

$$F_{ZG} = G\frac{Mm}{r^2} = 6{,}674\cdot10^{-11}\times\frac{1{,}989\cdot10^{38}\times90}{(10^{-6}\times3{,}086\cdot10^{16})^2} = 1{,}254\cdot10^{9} N$$

Op Aarde bedraagt de zwaartekracht op de man

$$F_A = mg = 90\times9{,}81\ N = 8{,}829\cdot10^{2} N$$

Zo dicht bij een supermassief zwart gat is de zwaartekracht dus 1,42 miljoen keer sterker dan op Aarde.

b) Veronderstel nu dat deze man wordt ingezogen door dit supermassieve zwarte gat (voeten eerst). De man is 1,80 meter groot, en zijn voeten bevinden zich momenteel op 10^{-6} pc van het zwarte gat, zijn hoofd 1,80 meter verder. Hoe sterk is de zwaartekracht (in newton) op de voeten van de man? Hoe groot is het verschil tussen de zwaartekracht op zijn voeten en de zwaartekracht op zijn hoofd? Je mag aannemen dat zijn massa zich enkel bevindt in zijn voeten (45 kg) en in zijn hoofd (45 kg) en de rest massaloos is.

Analoog als bij de vorige deelvraag kunnen we de zwaartekracht op de voeten berekenen als

$$F_{voeten} = G\frac{Mm}{r^2} = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \times \frac{1{,}989\cdot 10^{38}\times 45}{(10^{-6}\times 3{,}086\cdot 10^{16})^2} = 6{,}272\cdot 10^{8} N$$

Als ℓ de lengte van de man is, dan is verschil in zwaartekracht tussen zijn voeten en zijn hoofd

$$\begin{aligned} F_{voeten} - F_{hoofd} &= G\frac{Mm}{r^2} - G\frac{Mm}{(r+\ell)^2} \\ &= G\frac{Mm}{r^2}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{\ell}{r}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

Door reeksontwikkeling en het verwaarlozen van hogere orde termen bekomen we hieruit

$$\begin{aligned} F_{voeten} - F_{hoofd} &= G\frac{Mm}{r^2}\left(1 - 1 + 2\frac{\ell}{r}\right) \\ &= 2G\frac{Mm}{r^3}\ell \\ &= 7{,}318 \cdot 10^{-2}\ N \end{aligned}$$

Dit is weliswaar niet echt veel, maar het neemt wel toe als r^{-3}, en dit zal dus extreem groot worden dichter bij het zwarte gat.

c) Gebruik je vorige antwoord om (kort) uit te leggen wat er zal gebeuren wanneer de man fataal wordt ingezogen door dit supermassieve zwarte gat, en maak een schets.

Er zal spaghettificatie optreden. De man zal uit elkaar getrokken worden door een veel sterkere zwaartekracht op zijn voeten dan op zijn hoofd.

Vraag 3: energieproductie.

a) Actieve galactische kernen zijn de meest energetische (persistente) lichtbronnen in het universum. Beschouw een actieve galactische kern met een lichtkracht van $5 \times 10^{10}\,L_\odot$. Druk dit uit in een equivalent aantal spaarlampen (vermogen van 10 W).

De lichtkracht van de Zon is $1\,L_\odot = 3{,}828 \cdot 10^{26}$ W.
Uitgedrukt in aantal spaarlampen komt dit overeen met $5 \times 10^{10} \times 3{,}828 \cdot 10^{26} / 10 = 1{,}914 \cdot 10^{36}$ lampen.

b) Tegenwoordig is men het eens over de oorsprong van dit licht: Tijdens het accretieproces wordt een deel van de ingezogen materie omgezet naar energie volgens Einsteins formule $E = mc^2$. Veronderstel dat 2% van de geaccreteerde massa wordt omgezet in energie, welk massadebiet (in kg/s) moet dan ingezogen worden om de lichtkracht uit vorige deelvraag te bekomen?

Omgerekend naar massa-equivalent komt de lichtkracht van de actieve galactische kern overeen met

$$\frac{5\times10^{10}L_\odot}{c^2} = \frac{5\times10^{10}\times3{,}828\cdot10^{26}}{(2{,}998\cdot10^{8})^2}\frac{kg}{s} = 2{,}130\cdot10^{20}\frac{kg}{s}$$

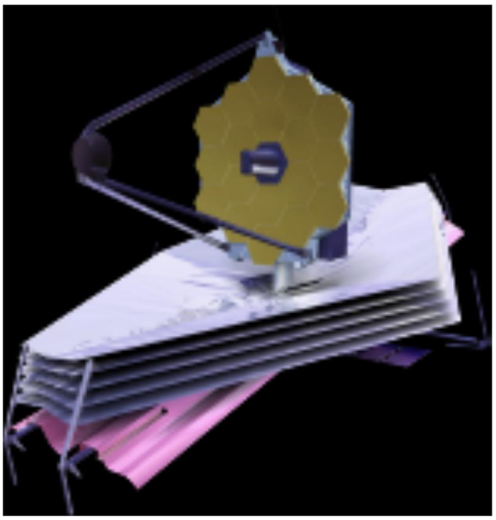
Bij een omzetten van 2% van de massa moet er dus 50 keer zoveel massa of $1{,}065 \cdot 10^{22}$ kg/s ingezogen worden om de lichtkracht van deze kern te kunnen verklaren.

Vraag 4: verduisterde actieve galactische kernen.
Een significant deel van alle actieve galactische kernen straalt niet helder wanneer we er met een optische telescoop naar kijken. Ze lijken dus verduisterd te zijn. Wanneer we er echter met een infraroodtelescoop naar kijken, zijn ze juist extra helder. Voer een kort onderzoek uit op het wereldwijde web, en leg in maximaal 5 zinnen uit wat hier aan de hand is.

Een groot deel van de actieve galactische kernen is verduisterd door een ring (torus) van stof, dat is materiaal in vaste vorm. Optisch licht wordt geabsorbeerd door dit stof, daarom zijn deze kernen verduisterd. Wanneer stof licht absorbeert, warmt het op en gaat het zelf in infrarood stralen. Met een infraroodtelescoop kunnen we dit warm stof waarnemen.

Open vragenreeks III: de James Webb Space Telescope

In december 2021 werd de James Webb ruimtetelescoop gelanceerd. Deze telescoop, die wel eens de opvolger van de Hubble Space Telescope genoemd wordt, zal gedurende de komende jaren het infrarode heelal afspeuren, op zoek naar sporen van de eerste sterren, het ontstaan van planeten, en meer. In deze vragenreeks gaan we een beetje dieper in op de telescoop en de wetenschappelijke thema's van de James Webb missie.



Vraag 1.
De James Webb ruimtetelescoop heeft een opvallend ontwerp. Niet alleen is de gouden hoofdspiegel met een doorsnede van 6,5 m de grootste die ooit in de ruimte werd gelanceerd, ook het reflecterende zonnescherm dat de grootte heeft van een tennisveld is erg kenmerkend (zie afbeelding).

a) We vergelijken de spiegelgrootte van de James Webb Space Telescope (JWST) met die van de Hubble Space Telescope (HST). De diameter van de hoofdspiegel van HST bedraagt 2,4 m. We bekijken nu de ster Proxima Centauri, die een lichtkracht van 0,0017 $L_\odot$ heeft, met beide telescopen. Hoeveel keer meer licht zal de JWST van deze ster ontvangen vergeleken met de HST?

De lichtkracht van Proxima Centauri is niet relevant voor deze vraag. De hoeveelheid licht die wordt opgevangen (uitgedrukt als vermogen *P*) door de beide telescopen hangt enkel af van de verhouding van hun oppervlaktes. Bijgevolg geldt

$$\frac{P_{JWST}}{P_{HST}} = \frac{\pi\left(\frac{6,5}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{2,4}{2}\right)^2} = \left(\frac{6,5}{2,4}\right)^2 = 7,3$$

De James Webb Space Telescope onderschept 7,3 keer meer licht dan de Hubble Space Telescope.

b) De James Webb ruimtetelescoop zal niet in een baan rond de Aarde bewegen, maar nabij een punt in de ruimte dat bekendstaat als het Lagrangepunt L2. In dit punt werken de zwaartekracht van de Zon en Aarde samen om objecten in een baan rond de Zon te houden. Bereken hoe ver L2 van de Aarde gelegen is. Tip: als *d* de afstand tussen de Zon en de Aarde is en *x* de afstand tussen de Aarde en L2, dan geldt bij benadering

$$\frac{1}{(d+x)^2} \approx \frac{1}{d^2}\left(1-\frac{2x}{d}\right)$$

op voorwaarde dat *x* veel kleiner is dan *d*.
Geef voldoende uitleg bij je berekening en motiveer je aannames.

In het Lagrangepunt L2 wordt de centripetale kracht F_c die de telescoop in een baan rond de Zon houdt gevormd door de gecombineerde zwaartekracht van de Aarde $F_{g,\oplus}$ en van de Zon $F_{g,\odot}$.
In formulevorm:

$$F_c = F_{g,\odot} + F_{g,\oplus}$$

Dit leidt tot

$$\frac{mv^2}{d+x} = \frac{GM_\odot m}{(d+x)^2} + \frac{GM_\oplus m}{x^2}$$

Hierbij is *d* de afstand tussen de Zon en de Aarde en *x* de gezochte afstand tussen de Aarde en L2.
De massa van de telescoop *m* valt weg.
De snelheid *v* van de telescoop kunnen we schrijven in functie van de omlooptijd T (= 1 jaar) als

$$v = \frac{2\pi(d+x)}{T}$$

Waarmee we de vorige vergelijking kunnen schrijven als

$$\frac{4\pi^2(d+x)}{T^2} = \frac{GM_\odot}{(d+x)^2} + \frac{GM_\oplus}{x^2}$$

Vervolgens maken we nu gebruik van bovenstaande tip, zodat

$$\frac{4\pi^2(d+x)}{T^2} = \frac{GM_\odot}{d^2}\left(1-\frac{2x}{d}\right) + \frac{GM_\oplus}{x^2}$$

zodat

$$\left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{2GM_\odot}{d^3}\right)x^3 = \left(\frac{GM_\odot}{d^2} - \frac{4\pi^2 d}{T^2}\right)x^2 + GM_\oplus$$

Nu kunnen we twee kanten op. Door de massa's van de Zon en de Aarde, de afstand (d = 1 AE) en de omlooptijd (T = 1 jaar) in te vullen, vinden we dat de term bij x^2 ongeveer nul – en dus verwaarloosbaar – is. Door de derde wet van Kepler te gebruiken ($\frac{T^2}{d^3} \approx \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$), komen we tot dezelfde conclusie. De eerste term in het rechterlid van bovenstaande vergelijking valt dus weg, en we vinden tenslotte

$$x^3 = \frac{GM_\oplus}{\frac{2GM_\odot}{d^3} + \frac{4\pi^2}{T^2}}$$

of

$$x^3 = \frac{M_\oplus}{3M_\odot} d^3$$

al naargelang de derde wet van Kepler al dan niet gebruikt werd. De uitdrukkingen invullen levert dan $x = 1{,}5 \cdot 10^9\ m$ op. Het L2 punt is dus 1,5 miljoen km verwijderd van de Aarde.

c) Het zonnescherm van de JWST werkt als een schild om de telescoop af te schermen tegen de Zon. Dit is belangrijk omdat de telescoop gekoeld moet blijven voor waarnemingen in het infrarood. Bereken hoeveel energie per seconde het scherm onderschept van de Zon. Het scherm staat loodrecht op de inkomende zonnestralen en heeft een totale oppervlakte van 300 m^2.

De flux F afkomstig van de Zon kan berekend worden door de lichtkracht te delen door de oppervlakte van een sfeer met als straal de afstand tussen de Zon en de telescoop. De energie E per seconde onderschept door het zonneschild is dan deze flux F, vermenigvuldigd met de oppervlakte A van het schild. Dit levert op:

$$\begin{aligned} E &= F \cdot A \\ &= \frac{L_\odot}{4\pi(d+x)^2} \cdot A \\ &= \frac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi(151 \cdot 10^9)^2} \times 300\ W \\ &= 4{,}01 \cdot 10^5 W \end{aligned}$$

Het zonneschild onderschept ongeveer 401 kilowatt aan zonnestraling.

Vraag 2.

Eén van de voornaamste doelen van de JWST zal zijn om de sterren en sterrenstelsels te observeren die als eerste gevormd werden na de Big Bang. Hoe verder weg het object zich bevindt, hoe langer het licht erover gedaan heeft om ons te bereiken. Op die manier kunnen we dus terugkijken in de tijd en de condities kort na de Big Bang bestuderen.

a) Een van de meest verafgelegen sterrenstelsels die met de HST waargenomen werden, heeft een Lyman α spectraallijn op een golflengte van 1,47 µm. Bereken de roodverschuiving van dit sterrenstelsel.

De roodverschuiving z kan berekend worden met de formule voor het dopplereffect:

$$z = \frac{\lambda_{waargenomen} - \lambda_{rust}}{\lambda_{rust}}$$

De Lyman α spectraallijn heeft een rustgolflengte van 121,6 nm. Dus dit levert een roodverschuiving op van

$$z = \frac{1470 - 121{,}6}{121{,}6} \approx 11{,}1$$

b) De JWST heeft als doel om sterren en sterrenstelsels op nog grotere roodverschuivingen waar te nemen. Welke twee belangrijke verschillen met de HST zullen dit mogelijk maken?

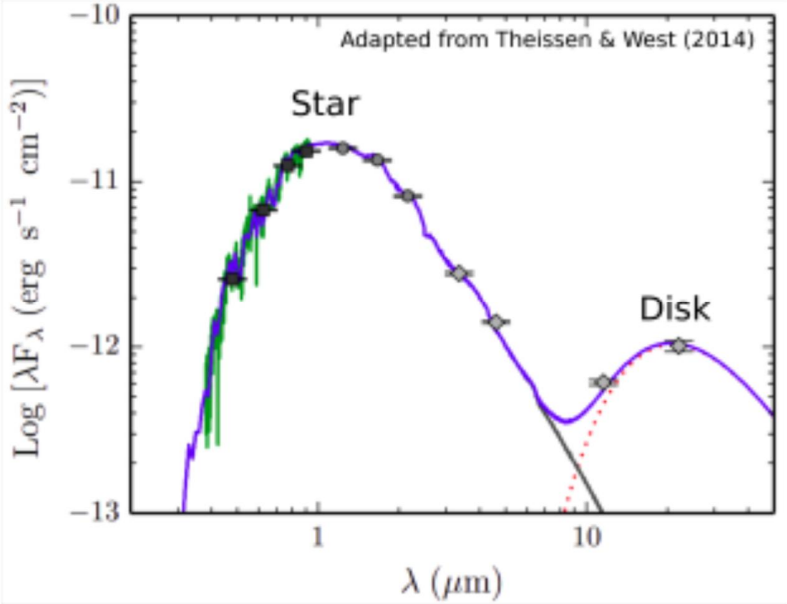
De grootte van de spiegel en het golflengtebereik. De JWST heeft een grotere spiegel hebben die ervoor zorgt dat zwakkere – en dus verder afgelegen – objecten nog kunnen worden waargenomen. Verder zal het golflengtebereik van de JWST meer naar het infrarood liggen, waardoor sterke roodverschuivingen nog steeds waargenomen kunnen worden. (Het golflengtebereik van de HST gaat maar tot 1,8 µm.)

c) Is het mogelijk om nog verder in de tijd terug te kijken, door elektromagnetische straling te gebruiken met nog langere golflengtes dan het infrarood? Indien ja, wat zouden we dan zien? Leg uit.

Het is inderdaad mogelijk om nog verder in de tijd te gaan kijken. De straling die we dan ontvangen, is reeds opgeschoven van het infrarode gebied naar microgolfstraling. Wat we kunnen zien in dit golflengtedomein is een tijdperk enkele honderdduizenden jaren na de Big Bang, toen materie recombineerde in atomen en voordat de eerste sterren ontstonden. Dit 'nagloeien' van de Big Bang wordt de kosmische achtergrondstraling genoemd, en werd ontdekt in 1964. Later is de kosmische achtergrondstraling nog verder in kaart gebracht, met behulp van satellieten zoals COBE, WMAP en Planck.

Vraag 3.
Een ander belangrijk doel van de JWST is het onderzoeken van exoplaneten. Dankzij de hoge gevoeligheid in het infrarode gebied zal de JWST zeer geschikt zijn voor waarnemingen van ster- en planeetvorming, en zelfs voor het detecteren van moleculen in de atmosfeer van hete gasplaneten.

a) Een belangrijk gegeven bij het vinden en bestuderen van (protoplanetaire) schijven rond sterren is de uitgestraalde energie als functie van golflengte, oftewel de spectrale energiedistributie (SED). Hieronder is een voorbeeld gegeven.



Aangeduid op de figuur zijn de verschillende fotometrische datapunten, samen met een model voor de ster, voor de schijf, en voor beide gecombineerd. Bereken aan de hand van de figuur (bij benadering) de temperatuur van de schijf en van de ster. Over welk type ster gaat het hier?

We kunnen de temperatuur *T* van de ster en de schijf bepalen door te kijken naar de golflengtes waar de straling maximaal is, en de verschuivingswet van Wien te gebruiken. Deze luidt

$$T = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3} mK}{\lambda_{max}}$$

waarbij λ_{max} de golflengte van de ster en schijf is waarbij de straling maximaal is. Afgaande op de figuur bedragen deze respectievelijk ongeveer 1 µm en 20 µm. Dit levert een temperatuur op van ongeveer 2900 K voor de ster en 150 K voor de schijf. De ster is dus een M-dwerg.

b) Een manier om de atmosferen van exoplaneten te onderzoeken is via transmissie-spectroscopie. Leg bondig en in je eigen woorden uit hoe deze techniek werkt.

Wanneer een exoplaneet tussen zijn ster en de waarnemer komt te staan, spreken we van een transit. Hierdoor zal de planeet een deel van het sterlicht blokkeren, wat we kunnen meten door een tijdelijke afname in de lichtintensiteit van de ster. De hoeveelheid geblokkeerd sterlicht kan dan gemeten worden als functie van de golflengte om zo een transmissie-spectrum te vinden. Dit spectrum kan de aanwezigheid verraden van moleculen in de atmosfeer van exoplaneten, bijvoorbeeld water of CO. Deze moleculen absorberen het licht van de ster dat door de atmosfeer gefilterd wordt, waardoor de diepte van de transit en de schijnbare grootte van de planeet toenemen.

c) De JWST zou met zijn hoge gevoeligheid en grote spiegel verschillen in het transmissie-spectrum kunnen meten tot op een nauwkeurigheid van 50 ppm (parts-per-million). We bekijken nu een typische hete gasplaneet met een straal die 1,3 keer die van Jupiter bedraagt, rond een ster zoals de Zon. In de atmosfeer van deze exoplaneet zorgt absorptie door CO voor een verandering van 500 km in de schijnbare straal van de planeet. Is dit signaal te meten met de JWST? Motiveer je antwoord.

Het transmissie-spectrum heeft als gemeten grootheid de hoeveelheid sterlicht die geblokkeerd wordt door de planetaire transit. Dit is simpelweg de verhouding van de oppervlakte van de planeet en de ster (uiteraard als waargenomen schijfje):

$$\frac{\pi R_{planeet}^2}{\pi R_{ster}^2} = \left(\frac{R_{planeet}}{R_{ster}}\right)^2$$

Deze formule kunnen we invullen met als straal voor de planeet eerst 1,3 R_{Jup} en vervolgens 1,3 R_{Jup} + 500 km. Daarbij is R_{Jup} = 69911 km en $R_{ster} = R_\odot$ = 696340 km.
Dit levert een transmissie-diepte op van respectievelijk 0,017035 en 0,017223. Dit is een verschil van 188 ppm, en dit zou dus meetbaar moeten zijn met de JWST. Merk hierbij op dat het van cruciaal belang is dat (1) de straal van de ster ook goed gekend is, en (2) de lichtkracht van de ster constant blijft gedurende de transit!

d) De JWST zal ook enkele kleine rotsachtige planeten in het vizier nemen, om de atmosferen van deze objecten verder te onderzoeken. Het risico is dat het transmissie-spectrum van dergelijke objecten volledig 'plat' zal zijn, dit wil zeggen er zijn geen variaties met de golflengte waar te nemen. Wat kunnen we dan leren uit zo'n spectrum?

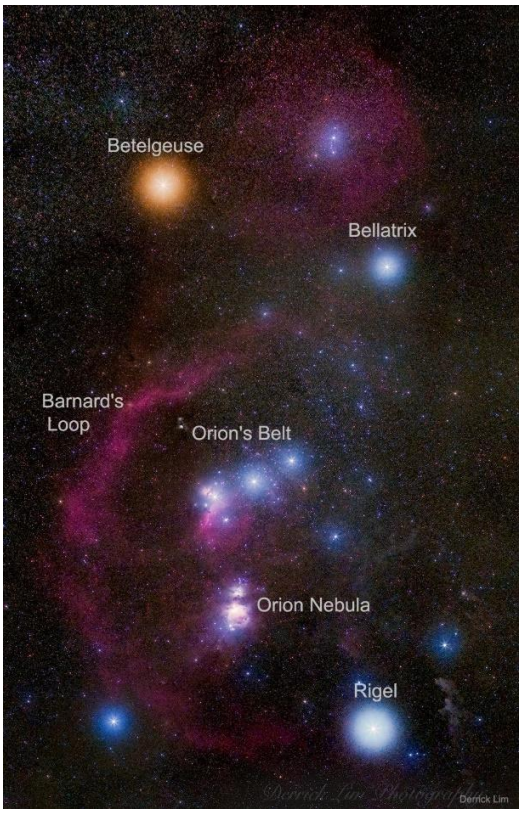
Er zijn enkele verklaringen voor een plat transmissie-spectrum. We sommen de voornaamste op. (1) Het signaal van de atmosfeer is te klein om op te pikken met de JWST, waardoor we enkel ruis meten. (2) Er bevinden zich hoge wolken in de atmosfeer van de planeet, waardoor alle chemische signalen en absorptielijnen bedekt worden, en de golflengte-afhankelijkheid verdwijnt. (3) De planeet heeft helemaal geen atmosfeer, en we meten simpelweg de straal van de planeet op alle golflengtes.

Open vragenreeks IV: Betelgeuze

Bij de vragen hieronder kan gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

Straal van de Zon: $R_{zon} = R_{\odot} = 6{,}95 \times 10^{8}$ m
Constante van Planck: $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s
Lichtsnelheid in vacuüm: $c = 3 \times 10^{8}$ m/s
Constante van Boltzmann: $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J · K^{-1}
Constante van Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W · m^{-2} · K^{-4}
Absolute bolometrische magnitude van de Zon: $M_{bol,\odot} = 4{,}74$

Betelgeuze is de op één na helderste ster in het sterrenbeeld Orion en werd zelfs al beschreven in de klassieke oudheid, onder andere door de astronoom Ptolemaeus. Uiteindelijk is de naam 'Betelgeuze' afgeleid uit het Arabische woord Yad al-Jauza, wat "hand van al-Jauza (de reus Orion)" betekent. Op het einde van 2019 begon de belangstelling voor Betelgeuze opnieuw enorm te groeien, omdat deze ster een plotse afname in intensiteit vertoonde in de observaties. Op het internet ging rond dat dit zou betekenen dat Betelgeuze binnenkort een supernova-explosie zou ondergaan, maar niets bleek minder waar. Astronomen aan onder andere de KU Leuven hebben met gedetailleerd onderzoek kunnen aantonen wat hiervan wel de oorzaak was: hoogstwaarschijnlijk werd het dimmen veroorzaakt door een gigantische stofwolk aan het oppervlak van de ster. In deze vraag gaan we met behulp van enkele basisgrootheden in de sterrenkunde een model opstellen voor Betelgeuze.
We nemen hiervoor aan dat Betelgeuze een sferisch symmetrische zwarte straler is, waarvan het spectrum een piek vertoont in het infrarode deel rond 800 nm. We weten verder ook dat de schijnbare magnitude (m_{bol}) van Betelgeuze gelijk is aan –1,17 en dat de ster een straal ($R_{\star}$) heeft van 900 keer de straal van de Zon ($R_{\odot}$).



Betelgeuze linksboven in het sterrenbeeld Orion. Foto: Derrick Lim (APOD, 21 maart 2018).

Vraag 1.

a) Leg de verschuivingswet van Wien uit in eigen woorden.

De verschuivingswet van Wien geeft aan dat de maximale golflengte van een spectrum van een zwarte straler recht evenredig is met de temperatuur van de zwarte straler. Dit volgt uit de formule van Planck voor thermische straling $B_\lambda(T)$.
De verschuivingswet van Wien luidt

$$\lambda_{max} \cdot T = b$$

waarbij de constante $2{,}898 \cdot 10^{-3} mK$.

b) Gebruik deze wet om de oppervlaktetemperatuur van Betelgeuze te bepalen. Welke aanname laat ons toe om deze wet te gebruiken?

We kunnen de wet van Wien gebruiken omdat we hier aannemen dat Betelgeuze te benaderen valt als een zwarte straler.
Aldus vinden we als oppervlaktetemperatuur van Betelgeuze

$$T = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3} mK}{800\ nm} = 3622{,}5\ K$$

c) Bereken de lichtkracht van Betelgeuze. Gebruik hiervoor de aanname die we gemaakt hebben.

De lichtkracht of luminositeit L_* van een zwarte straler wordt gegeven door de wet van Stefan-Boltzmann:

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T^4$$

waarbij $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} de constante van Stefan-Boltzmann (of eerste stralingsconstante) is.
We kunnen het resultaat van de vorige vraag hier invullen en bekomen zo dat

$$\begin{aligned} L_* &= 4\pi \times (900 \times 6{,}95 \cdot 10^8)^2 \times 5{,}67 \cdot 10^{-8} \times (3622{,}5)^4\ J/s \\ &= 4{,}8 \cdot 10^{31}\ J/s \\ &= 1{,}25 \cdot 10^5\ L_\odot \end{aligned}$$

Vraag 2.

a) Bepaal de absolute bolometrische magnitude van Betelgeuze. Leg kort uit wat men met ‘bolometrisch’ bedoelt en wat het verschil is tussen schijnbare en absolute magnitude.

De bolometrische absolute magnitude houdt rekening met de straling van de ster over het hele elektromagnetische spectrum. We kunnen deze bereken met de formule

$$M_{bol,*} = M_{bol,\odot} - 2{,}5 \log \frac{L_*}{L_\odot}$$

Voor de Zon is bekend dat $M_{bol,\odot} = 4{,}74$. Door de eerder berekende waarde voor L_* in te vullen, krijgen we dat

$$M_{bol,*} = 4{,}74 - 2{,}5 \log \frac{1{,}25 \cdot 10^5\ L_\odot}{L_\odot} = -8$$

De absolute magnitude is gedefinieerd als de schijnbare magnitude die hetzelfde object zou hebben als het zich op een afstand van 10 parsec zou bevinden, zonder extinctie van het licht door absorptie door het interstellair medium of kosmisch stof.

b) Maak een afschatting voor de afstand van Betelgeuze. Druk deze afstand uit in lichtjaar.

Uit de zogenoemde afstandsmodulus

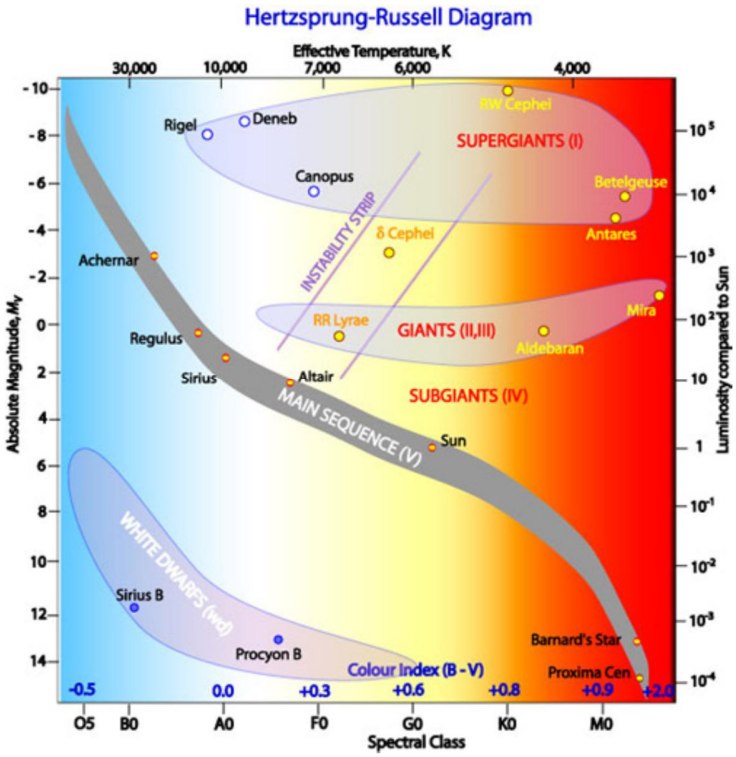
$$m_{bol} - M_{bol} = 5 \log d^{(pc)} - 5$$

(waarbij d de afstand in parsec voorstelt) halen we dat

$$d = 10^{\frac{m_{bol} - M_{bol} + 5}{5}} = 232\ pc = 773\ lichtjaar$$

c) Met wat je nu berekend hebt voor Betelgeuze, plaats deze ster in een Hertzsprung-Russell diagram en vertel wat we hieruit kunnen leren over de ster.

Betelgeuze bevindt zich in de rechterbovenhoek van het Hertzsprung-Russell diagram in de groep van de 'superreuzen', omdat de ster heel helder is maar een lage oppervlaktetemperatuur heeft. Aangezien het HR-diagram sterevolutie aangeeft, kunnen we hieruit besluiten dat Betelgeuze een geëvolueerde ster is. We weten van deze superreuzen dat ze initieel een grote massa hebben (≈ 10 $M_\odot$), de buitenste lagen van de ster enorm opgezwollen zijn en de kern compact is, en dat de ster een relatief hoog massaverlies heeft door een sterrenwind. Betelgeuze is dus al verder geëvolueerd dan de 'hoofdreeks'; er is geen waterstoffusie meer in de kern.



Vraag 3.
De wet van Planck kan weergegeven worden met volgende formule:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

Hier is *h* de constante van Planck, *c* de lichtsnelheid, k_B de Boltzmann constante, *T* de temperatuur en λ de golflengte.
Leid de verschuivingswet van Wien af, vertrekkende van de wet van Planck.
Daarbij mag gebruikgemaakt worden van het feit dat de vergelijking

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = 5$$

als oplossing x = 4,965 heeft.

De verschuivingswet van Wien geeft de golflengte van maximale straling aan. Dit leidt ons ertoe om de afgeleide van $B_\lambda(T)$ gelijk te stellen aan nul, om het maximum van deze functie te vinden.

$$\frac{dB_\lambda(T)}{dT} = -\frac{10hc^2}{\lambda^6}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1} - \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1\right)^2}\left(-\frac{hc}{\lambda^2 k_B T}e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}\right) = 0$$

We kunnen dit herwerken naar

$$5\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right) = \frac{hc}{\lambda k_B T}e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}$$

We stellen nu

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

en substitueren dit in voorgaande vergelijking.
Aldus bekomen we

$$5(e^x - 1) = xe^x$$

of nog

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = 5$$

Met de hierboven gegeven oplossing voor deze vergelijking vinden we dan dat

$$\frac{hc}{\lambda_{max} k_B T} = 4{,}965$$

Verdere berekening levert dan

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4{,}965 \times k_B}$$
$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{4{,}965 \times 1{,}38 \cdot 10^{-23}}\ mK$$
$$= 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ mK$$

Dit is het einde van de eerste ronde van
de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2022.