Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2012

Oplossingen

2 april 2012

In dit document worden oplossingen voorgesteld voor de vragen van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2012. Het spreekt voor zich dat andere methodes eventueel ook tot correcte oplossingen kunnen leiden.

Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2012
Vereniging Voor Sterrenkunde
Oostmeers 122c
8000 Brugge

Het organiserend comité van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2012: Steven Bloemen (KULeuven), Annelies Cloet-Osselaer (UGent), Nicki Mennekens (VUB), Toine Mercier (JVS) en Frank Tamsin (VVS).

http://www.sterrenkundeolympiade.be
info@sterrenkundeolympiade.be

Meerkeuze vragenreeks

1. De Poolster lijkt stationair aan de hemel
a) omdat de Aarde niet beweegt ten opzichte van de Poolster.
b) omdat de Aarde zich bevindt in het verlengde van de rotatie-as van de Poolster.
c) omdat zowel de Aarde als de Poolster zich aan dezelfde snelheid bewegen in ons Melkwegstelsel.
d) om een andere reden dan deze die hierboven zijn aangegeven.

De Poolster lijkt stationair omdat de ster zich ongeveer in het verlengde van de rotatie-as van de Aarde bevindt.

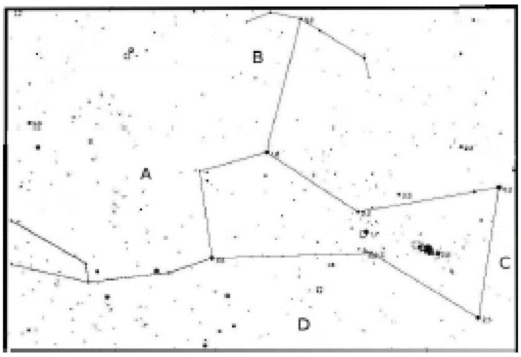
2. Chandrayaan-1 is een onbemande Indische ruimtemissie naar de Maan. Het ruimtetuig werd gelanceerd op 22 oktober 2008 en kwam terecht in een baan 100 kilometer boven het maanoppervlak. Hoe lang duurde op dat ogenblik één omloop van Chandrayaan-1 rond de Maan?
a) 57 minuten;
b) 30 minuten;
c) 118 minuten;
d) 79 minuten.

Dit kan berekend worden aan de hand van de derde wet van Kepler:

$$T^2 / a^3 = 4\,\pi^2 / (G\,(M+m))$$

In dit geval kan de massa m van Chandrayaan-1 verwaarloosd worden ten opzichte van de massa $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg van de Maan. Verder is $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 de universele gravitatieconstante (of constante van Cavendish) en is a = r + 100 km waarbij r = 1740 km de straal van de Maan is.

3. De figuur rechts toont een schets van het bekende wintersterrenbeeld Orion. De richting van het noorden is (ongeveer) aangeduid met de letter
a) A;
b) B;
c) C;
d) D.



De configuratie kan eenvoudig op een sterrenkaart of via een planetariumprogramma op een pc nagegaan worden. In onze streken staat Orion in de winter prominent in het zuiden, waarbij het punt C het zuiden aangeeft en derhalve A dus de richting van het noorden is.

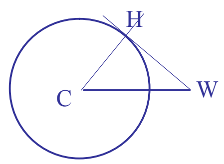
4. Beschouw de volgende twee uitspraken:
P: Er worden absorptielijnen waargenomen in het spectrum van de Zon.
Q: De kern van de Zon heeft een temperatuur van meer dan 10 miljoen graden Celsius en de temperatuur aan het oppervlak van de Zon bedraagt ongeveer 6000 graden Celsius.
Welk van volgende opties is correct:
a) Uitspraak "P" is correct maar uitspraak "Q" is niet correct;
b) Uitspraak "P" is niet correct en uitspraak "Q" is wel correct;
c) Beide uitspraken zijn correct en "Q" is de correcte reden voor "P";
d) Beide uitspraken zijn correct, maar "Q" is niet de reden voor "P".

In dit verband kan verwezen worden naar de wetten van Kirchhoff:

- Een hete, vaste stof produceert een continu spectrum.
- Een heet gas produceert een spectrum met discrete golflengten (emissiespectrum), die afhangen van de energieniveaus van de atomen in het gas.
- Een hete, vaste stof omgeven door een koel gas (ten opzichte van het object) produceert een semi-continu spectrum (absorptiespectrum), met 'gaten' die afhangen van de energieniveaus van de atomen in het gas.

5. Wat is de afstand tot de horizon voor iemand die rechtstaat op het aardoppervlak (op zeeniveau)?
a) 500 km;
b) 5 km;
c) 15 km;
d) 50 km.

Zij C het centrum van de Aarde en W de positie van de ogen van de waarnemer. De horizon is de plaats waar de raaklijn uit W aan de Aarde het aardoppervlak raakt, hier weergegeven door H.
Nemen we als straal voor de Aarde |CH| = 6378135 meter en nemen we als ooghoogte ruwweg 2 meter, dan is |CW| = 6378137 meter. De stelling van Pythagoras leert ons dan dat $|HW|^2 = |CW|^2 - |CH|^2$ zodat de horizonafstand |HW| = 5051 meter.
De figuur is uiteraard niet op schaal.



6. Welk paar van de volgende gebeurtenissen doet zich voor een waarnemer in West-Europa voor in de zomer?
a) maximale diameter van de zonneschijf aan de hemel en minimale hoogte van de Zon boven de horizon;
b) minimale diameter van de zonneschijf aan de hemel en minimale hoogte van de Zon boven de horizon;
c) minimale diameter van de zonneschijf aan de hemel en maximale hoogte van de Zon boven de horizon;
d) maximale diameter van de zonneschijf aan de hemel en maximale hoogte van de Zon boven de horizon;

De diameter van de zonneschijf aan de hemel is minimaal als de Zon het verst van de Aarde staat, met andere woorden wanneer de Aarde zich in het aphelium van haar baan rond de Zon bevindt. Deze situatie doet zich voor omstreeks 5 juli.
Anderzijds bereikt de Zon op het noordelijk halfrond haar grootste hoogte in de zomer.

7. De duur van de dag en van de nacht zijn op de meeste plaatsen op Aarde niet aan elkaar gelijk
a) omdat de Aarde rond haar as roteert;
b) omdat de Aarde rond de Zon wentelt;
c) omdat de as van de Aarde geheld is ten opzichte van het baanvlak van de Aarde;
d) omdat de Aarde niet perfect bolvormig is.

Doordat de equator van de Aarde geheld is ten opzichte van de ecliptica, komt de zon niet altijd exact op in het oosten en gaat ze niet altijd exact onder in het westen. Daardoor zijn de dagboog en de nachtboog van de Zon meestal niet even lang.

8. Voor een bepaald object (in vaste vorm) worden vier grootheden bepaald, zowel op de Aarde als op de Maan. Voor welke grootheid bekomen we een verschillend resultaat?
a) de massa;
b) het gewicht;
c) het volume;
d) de dichtheid.

Het gewicht wordt bepaald door de massa en de valversnelling. Deze laatste is afhankelijk van de massa van de Aarde of de Maan, en derhalve voor beide hemellichamen verschillend.

9. De perihelium (respectievelijk het aphelium) van een object dat zich in een baan rond de Zon beweegt, is het punt op de baan waar het object zich het dichtst (respectievelijk het verst) bij de Zon bevindt. De periheliumafstand van de Aarde bedraagt ongeveer 147 miljoen kilometer. Hoe groot is dan de apheliumafstand van de Aarde?
a) Ongeveer twee keer de periheliumafstand (afgerond 300 miljoen kilometer);
b) Ongeveer drie keer de periheliumafstand (afgerond 450 miljoen kilometer);
c) Net iets groter dan de periheliumafstand (ongeveer 155 miljoen kilometer);
d) Precies even groot als de periheliumafstand (ongeveer 147 miljoen kilometer).

De baan van de Aarde rond de Zon is ellipsvormig. Enerzijds is de baan dus niet perfect cirkelvormig, maar anderzijds is de afwijking van de cirkelvorm eerder beperkt.

10. Beschouw de volgende twee uitspraken (waarbij gegeven is dat de massa van Saturnus $5 \cdot 10^{26}$ kg bedraagt en de afstand van Saturnus tot de Aarde $1{,}4 \cdot 10^{9}$ km is):
P: De gravitatiekracht die Saturnus uitoefent op een persoon op Aarde, is ongeveer even groot als de gravitatiekracht die een tweede persoon uitoefent die zich op enkele centimeter afstand van de eerste persoon bevindt.
Q: Saturnus heeft een erg lage dichtheid in vergelijking met de andere planeten.
Welk van volgende opties is correct:
a) Uitspraak “P” is correct maar uitspraak “Q” is niet correct;
b) Uitspraak “P” is niet correct en uitspraak “Q” is wel correct;
c) Beide uitspraken zijn correct en “Q” is de correcte reden voor “P”;
d) Beide uitspraken zijn correct, maar “Q” is niet de reden voor “P”.

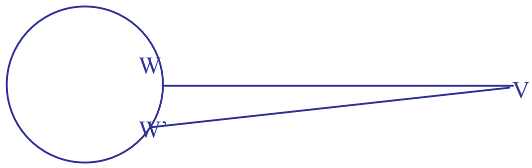
De gravitatiekracht F die twee lichamen met massa m_1 en m_2 op een onderlinge afstand r op elkaar uitoefenen, kan berekend worden aan de hand van de gravitatiewet van Newton:
$F = G\, m_1\, m_2 / r^2$ waarbij $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 de universele gravitatieconstante (of constante van Cavendish) is. Nemen we bijvoorbeeld een persoon met een massa van 70 kg, dan is de gravitatiekracht tussen Saturnus en die persoon $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ N. Twee personen van elk 70 kg op 0,5 meter van elkaar, oefenen een gravitatiekracht uit op elkaar van $1{,}3 \cdot 10^{-6}$ N.
Hierbij zijn overigens enkel de massa’s zelf van belang, en niet het volume of de dichtheid van de betrokken massa’s.

11. Een ster komt op in Athene (38° noorderbreedte, 24° oosterlengte) om $19^{h}\,10^{m}$ UT. Hoe laat zal men deze ster in Brussel (50,8° noorderbreedte, 4° oosterlengte) zien opkomen?
a) $17^{h}\,50^{m}$ UT;
b) $19^{h}\,10^{m}$ UT;
c) $19^{h}\,30^{m}$ UT;
d) $20^{h}\,30^{m}$ UT.

Een verschil van 15° (= 360° / 24) in lengteligging tussen twee plaatsen komt overeen met een uur tijdsverschil in de opkomst van eenzelfde hemellichaam.

12. Een eerste waarnemer neemt een vuurbol waar in het zenit, terwijl een tweede waarnemer, op 30 kilometer ten noorden van de eerste gelegen, de vuurbol waarneemt op 10° van het zenit. De hoogte van deze vuurbol was dan:
a) 130 km
b) 150 km
c) 170 km
d) 190 km

De eerste waarnemer noemen we W en de tweede W'. De positie van de vuurbol is weergegeven door V. Gezien de beperkte afstand tussen W en W' ten opzichte van de straal van de Aarde kunnen we de driehoek VWW' als rechthoekig in W beschouwen en met |WW'| = 30 km.
Dan is |WV| = |WW'| / tan 10° = 170 km.
De figuur is uiteraard niet op schaal.



13. Welk van volgende bewegingen zorgt ervoor dat de Maan fasen vertoont, van de Aarde uit gezien?
a) de rotatie van de Maan rond haar eigen as;
b) de omwenteling van de Maan rond de Aarde;
c) de rotatie van de Zon rond haar eigen as;
d) de omwenteling van de Aarde rond de Zon.

De Zon verlicht de helft van de Maan die naar de Zon toe gericht is. De maanfasen (of schijngestalten van de Maan) zijn afhankelijk van de hoek waaronder wij vanaf de Aarde tegen de verlichte helft van de Maan aankijken. Deze hoek wijzigt door de beweging van de Maan rond de Aarde.

14. Een waarnemer ziet een smalle maansikkel aan de westelijke horizon. Wanneer kan zich dit voordoen?
a) bij zonsopkomst;
b) rond de middag;
c) op elk ogenblik van de dag of de nacht;
d) bij zonsondergang.

Een smalle maansikkel is te zien kort voor of kort na nieuwe maan, dus wanneer Zon en Maan dicht aan de hemel dicht bij elkaar bevinden. Als de maansikkel aan de westelijke horizon te zien is, betekent dit dat de Maan op dat ogenblik ondergaat, en de Zon dus ook rond die tijd ondergaat.

15. Als de helling van de equator op de ecliptica 40° zou bedragen in plaats van 23,5°, dan zou de gemiddelde temperatuur in Parijs
a) zowel in de zomer als in de winter lager zijn;
b) lager zijn in de zomer en hoger in de winter;
c) hoger zijn in de zomer en in lager de winter;
d) zowel in de zomer als in de winter hoger zijn.

De gemiddelde temperatuur wordt in belangrijke mate bepaald door de hoek waaronder de zonnestralen invallen op het aardoppervlak. De temperatuur zal hoger zijn naarmate de Zon hoger aan de hemel komt. De breedteligging ϕ van Parijs is ongeveer 48,5°. Noem $\delta_\odot$ declinatie van de Zon op een bepaalde dag, dan is de maximale hoogte $h_\odot = 90° - \phi + \delta_\odot$. Op dit ogenblik is $\delta_\odot = +23{,}5°$ bij het begin van de astronomische zomer (wat overeenkomst met de helling van de equator op de ecliptica) en $\delta_\odot = -23{,}5°$ bij het begin van de astronomische winter, wat respectievelijk tot maximale zonshoogtes van 65° en 18° leidt. Als de helling van de equator op de ecliptica 40° zou bedragen, dan zouden we respectievelijk 81,5° en 1,5° bekomen als maximale hoogte van de Zon bij het begin van de zomer en het begin van de winter.

16. Van welk van volgende hemellichamen is de massa het best te vergelijken met de massa van een witte dwerg?
a) de Maan;
b) de Aarde;
c) Jupiter;
d) de Zon.

Een witte dwerg is een ster die aan het einde van haar levenscyclus is gekomen. In de witte dwerg vinden dus geen kernreacties meer plaats. De massa van de kern moet kleiner zijn dan 1,4 zonmassa's (de zogenaamde Chandrasekhar-limiet), anders eindigt de ster als een neutronenster of eventueel zelfs een zwart gat.

17. Bij welk van volgende planeten zou de Zon opkomen in het westen?
a) Mercurius;
b) Venus;
c) Mars;
d) Saturnus;
e) Uranus.

Op Venus komt de Zon op in het westen en gaat ze onder in het oosten. Dit is een gevolg van de retrograde beweging van de planeet, waarbij Venus van oost naar west roteert (en dus niet van west naar oost zoals de Aarde en de andere planeten).

18. Van welk van volgende zaken is de straal het best te vergelijken met de straal van een witte dwerg?
a) de Aarde;
b) een kleine stad;
c) een voetbalstadion;
d) een basketbal;
e) de Zon.

De typische straal van een witte dwerg ligt in de orde van enkele duizenden kilometer.

19. Beschouw de volgende twee uitspraken:
P: Eclipsen (dit wil zeggen zons- en maansverduisteringen) zijn niet gelijkmatig verspreid doorheen het jaar, maar komen in een bepaald jaar slechts in enkele maanden voor.
Q: De baan van de Maan (rond de Aarde) maakt een hoek van ongeveer 5° met de baan van de Aarde (rond de Zon).
Welk van volgende opties is correct:
a) Uitspraak "P" is correct maar uitspraak "Q" is niet correct;
b) Uitspraak "P" is niet correct en uitspraak "Q" is wel correct;
c) Beide uitspraken zijn correct en "Q" is de correcte reden voor "P";
d) Beide uitspraken zijn correct, maar "Q" is niet de reden voor "P".

Eclipsen kunnen zich enkel voordoen wanneer de Maan zich in de nabijheid van een van de knopen van haar baan rond de Aarde bevindt, dus nabij de snijlijn van het baanvlak van de Aarde en het baanvlak van de Maan.

20. Bij haar geboorte heeft een ster doorgaans volgende samenstelling:
a) 49 % waterstof – 49 % helium – 2 % zwaardere elementen
b) 74 % waterstof – 24 % helium – 2 % zwaardere elementen
c) 89 % waterstof – 10 % helium – 1 % zwaardere elementen
d) 25 % waterstof – 74 % helium – 1 % zwaardere elementen
e) 98 % waterstof – 2 % helium – 0 % zwaardere elementen

Dit zijn de typische massapercentage van donkere wolken waaruit sterren ontstaan. Merk op dat in aantal atomen uitgedrukt er ongeveer 90% waterstofatomen zijn.

21. Aangezien alle sterren bij het begin van hun leven grotendeels dezelfde samenstelling hebben, wat is dan het meest bepalend voor de onderlinge verschillen in hun evolutie?
a) de plaats in het heelal waar ze gevormd worden;
b) het tijdstip waarop het gevormd worden;
c) de lichtkracht wanneer ze gevormd worden;
d) de massa wanneer ze gevormd worden;
e) de kleur wanneer ze gevormd worden.

De massa van een ster is de meest onderscheidende factor in haar levensloop. Het aandeel aan zwaardere elementen speelt zeker ook een rol, maar die is minder doorslaggevend.

22. Ster A heeft een effectieve temperatuur van 4000 K en ster B heeft een effectieve temperatuur van 40000 K. Als beide sterren ongeveer dezelfde straal hebben, welk van volgende beweringen is dan niet correct:
a) Ster B is lichtkrachtiger dan ster A;
b) Ster A straalt meer energie uit in het infrarood dan in het ultraviolet;
c) Ster B straalt meer energie uit in het ultraviolet dan in het infrarood;
d) Ster A straalt meer energie uit in het infrarood dan ster B.

Volgens de wet van Stefan-Boltzmann is de lichtkracht van een ster evenredig met de vierde macht van de temperatuur. De golflengte λ_{max} waarbij een ster van temperatuur T maximaal straalt, kan berekend worden met de verschuivingswet van Wien: $\lambda_{max}.T = b$ waarbij $b = 2{,}897756 \cdot 10^{-3}$ K·m. Ten slotte, wanneer we de Plancke krommen bekijken van de energie-uitstraling in functie van de golflengte, dan liggen krommen voor sterren met hogere temperatuur steeds volledig boven krommen voor sterren met lagere temperatuur.

23. Hoelang ongeveer vertoeft een ster van spectraalklasse G op de hoofdreeks?
a) duizend jaar;
b) tienduizend jaar;
c) een miljoen jaar;
d) honderd miljoen jaar;
e) tien miljard jaar.

De Zon is een ster van spectraalklasse G en heeft uiteraard een massa van één zonsmassa. De typische leeftijd op de hoofdreeks voor dergelijke ster is ongeveer tien miljard jaar.

24. Een ster met een massa van $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg en een straal van $8{,}0 \cdot 10^{5}$ km draait rond haar as in 30 dagen. Op een afstand van 1 astronomische eenheid van deze ster maakt een planeet met een massa van $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg een omloop rond deze ster in een periode van 365 dagen. Als de straal van de ster zou afnemen tot $8{,}0 \cdot 10^{4}$ km, hoe groot zou dan de omloopperiode van de planeet worden?
a) 3,65 dagen;
b) 36,5 dagen;
c) 365 dagen;
d) 3650 dagen.

Volgens de derde wet van Kepler is er een verband tussen de gemiddelde afstand van een planeet tot haar centrale ster en de omloopperiode van die planeet. De massa van de centrale ster speelt daarbij een rond, maar de straal helemaal niet. Een wijziging van de straal van de centrale ster heeft derhalve geen invloed op de omloopperiode van de betreffende planeet.
Merk op dat de oorspronkelijke situatie ongeveer overeenkomt met de beweging van de Aarde rond de Zon.

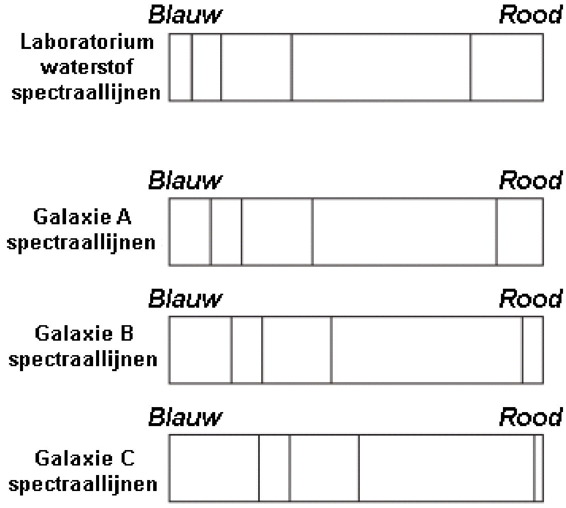
25. We beschouwen twee sterren op de hoofdreeks: een groene ster A en een rode ster B. Als beide sterren zouden botsen en nadien één enkele ster vormen, wat zou dan de kleur van deze ster zijn?
a) rood;
b) oranje;
c) geel;
d) blauw.

Voor hoofdreekssterren geldt is er min of meer een verband tussen de massa en de kleur van de ster. In toenemende massa zijn de kleuren rood, oranje, geel, groen, blauw. Als we dus aan een groene ster nog massa (van een rode ster) toevoegen, dan krijgt die nog meer massa, en eindigen we dus met een blauwe ster.
Er moet wel opgemerkt worden dat een groene ster eigenlijk niet echt bestaat.

26. Veronderstel dat Betelgeuze een supernova zou worden en als dusdanig zou waargenomen worden van op Aarde. Hoe zou dit object er met het blote oog uit zien?
a) Omdat de supernova-explosie de ster vernietigt, zou Betelgeuze plots uit het zicht verdwijnen.
b) We zouden een gaswolk zien die uitdijt vanaf de positie waar Betelgeuze zich bevond; over een periode van enkele weken zou deze wolk de hele hemel vullen.
c) Betelgeuze zou een lichtpunt aan de hemel blijven, mar zou plots veel helderder worden zodat we de ster voor enkele weken ook overdag met het blote oog zouden kunnen zien.
d) Betelgeuze zou plots veel groter lijken en snel de afmetingen van de volle maan aan de hemel bereiken; de ster zou ook ongeveer even helder zijn als de volle maan.

De huidige visuele magnitude van Betelgeuze varieert tussen 0,4 en 1,3 en de afstand d van de ster is ongeveer 430 lichtjaar of 132 parsec. De absolute magnitude M van een supernova bedraagt ongeveer –19. Hieruit kan afgeleid worden wat de visuele magnitude m van Betelgeuze zou zijn op het ogenblik dat de ster supernova wordt: $m = M - 5 + 5 \log d = -13{,}4$. Dit komt ongeveer overeen met de visuele magnitude van de volle maan. Derhalve zou Betelgeuze als suprnova dus overdag zichtbaar zijn.

27. In de figuur rechts worden de spectraallijnen van waterstofgas in drie sterrenstelsels A, B en C vergeleken met de spectraallijnen van waterstofgas zoals die in een aards laboratorium zijn opgemeten. Welke informatie kunnen we hieruit afleiden?
a) Stelsel A verwijdert zich van de Aarde en de stelsels B en C naderen de Aarde.
b) Stelsel B verwijdert zich van de Aarde en de stelsels A en C naderen de Aarde.
c) Alle drie de stelsels A, B en C naderen de Aarde.
d) Alle drie de stelsels A, B en C verwijderen zich van de Aarde.



Voor elk van de spectra van de sterrenstelsels A, B en C zijn de spectraallijnen naar het rood verschoven ten opzichte van de golflengte die de lijnen hebben in laboratoriumomstandigheden.

28. Welke van de volgende paren sterren lijken het best op elkaar, voor wat betreft lichtkracht en oppervlaktetemperatuur?
a) Betelgeuze en de ster van Barnard;
b) Rigel en Betelgeuze;
c) Alfa Centauri en de Zon;
d) Sirius en Procyon B.

Voor de oppervlaktetemperatuur van een ster is de spectraalklasse doorslaggevend en voor de lichtkracht is dat de absolute magnitude. We vinden volgende waarden:

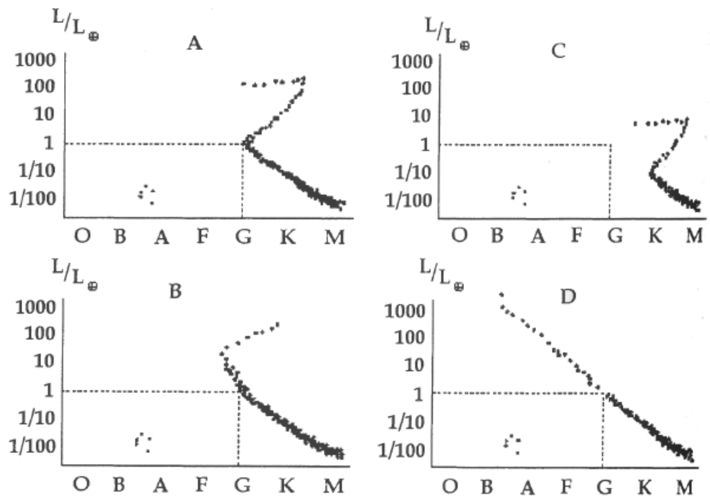
Ster	Sp	M
Betelgeuze	M2	–5,14
Ster van Barnard	M4	13,20
Rigel	B8	–6,72
α_1 Centauri	G2	+4,45
Zon	G2	+4,83
Sirius	A0	+1,44
Procyon B	DA	13,20

Er zijn dus enkele sterren die ofwel overeenkomen wat spectraalklasse betreft, ofwel wat absolute magnitude betreft, maar enkel de Zon en Alfa Centauri komen op beide vlakken overeen.

29. Welke B–V index komt overeen met de ster met de hoogste oppervlaktetemperatuur?
a) 0,1
b) 0,5
c) 0
d) –0,5

Een negatieve waarde voor B–V betekent dat de B-magnitude in waarde kleiner is dan de V-magnitude. Gezien een kleinere waarde voor de magnitude een grotere lichtkracht impliceert, betekent dit dan dat de energie-uitstraling in het B-gebied (kortere golflengten) groter is dan in het V-gebied. Het B-gebied staat voor hogere oppervlaktetemperaturen dan het V-gebied.

30. De figuur rechts toont het Hertzsprung-Russell-diagram van vier sterrenhopen. Rangschik deze vier sterrenhopen volgens leeftijd (van jong naar oud):
a) A – B – C – D
b) D – C – B – A
c) D – B – A – C
d) C – B – A – D
e) B – A – C – D



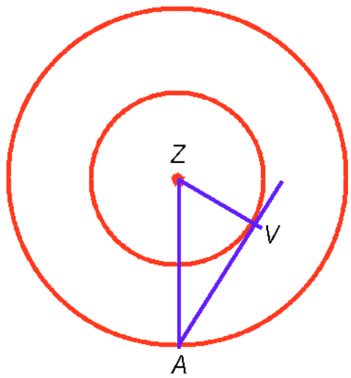
Naarmate de leeftijd van een sterrenhoop toeneemt, verlaten steeds zwaardere sterren de hoofdreeks, en schuift dus het zogenaamde ‘turnoff’-punt op naar beneden toe.

1.	**D**	**11.**	**D**	**21.**	**D**
2.	**C**	**12.**	**C**	**22.**	**D**
3.	**A**	**13.**	**B**	**23.**	**E**
4.	**C**	**14.**	**D**	**24.**	**C**
5.	**B**	**15.**	**C**	**25.**	**D**
6.	**C**	**16.**	**D**	**26.**	**C**
7.	**C**	**17.**	**B**	**27.**	**D**
8.	**B**	**18.**	**A**	**28.**	**C**
9.	**C**	**19.**	**C**	**29.**	**D**
10.	**D**	**20.**	**B**	**30.**	**C**

Open vragenreeks I: elliptische beweging

Vraag 1.
a) De hoek tussen de verbindingslijn tussen de Aarde en de Zon enerzijds en tussen de Aarde en een planeet anderzijds wordt elongatie genoemd. De maximale elongatie van Venus bedraagt 46°. In de veronderstelling dat de baan van Venus cirkelvormig is, bereken de straal van deze baan in astronomische eenheden.

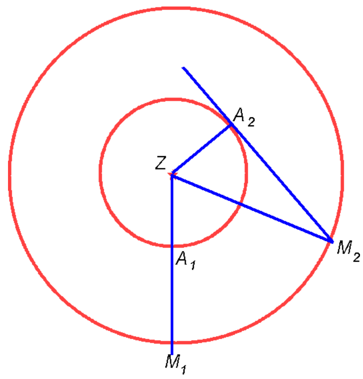
De situatie is weergegeven door de figuur hiernaast (niet op schaal), waarbij Z de positie van de Zon voorstelt, V die van Venus bij maximale elongatie en A die van de Aarde.
Er is gegeven dat $Z\hat{A}V = 46°$ en uiteraard is ook bekend dat |ZA| = 1 astronomische eenheid.
Aangezien de verbindingslijn VA raakt aan de baan van Venus, is de hoek $Z\hat{V}A$ recht.
Derhalve is de straal van de baan van Venus:
|ZV| = |ZA| sin46° = 0,72 AE.



b) De omlooptijd van Mars rond de Zon bedraagt 687 dagen. Op een bepaald moment is Mars in oppositie met de Zon, en 106 dagen later staat de planeet in kwadratuur. Bereken hieruit de afstand van Mars tot de Zon in astronomische eenheden, zonder gebruik te maken van de wetten van Kepler. De excentriciteit van de banen van de Aarde en van Mars mag verwaarloosd worden (dit wil zeggen dat de banen hier als cirkelvormig mogen beschouwd worden).

De situatie is weergegeven door de figuur hiernaast (niet op schaal), waarbij Z de positie van de Zon voorstelt, M_1 die van Mars bij oppositie, M_2 die van Mars bij kwadratuur en A_1 en A_2 de posities van de Aarde zijn op dezelfde momenten. Het feit dat Mars in kwadratuur staat, betekent dat de hoek $Z\hat{A}_2M_2 = 90°$.
Op positie M_2 heeft Mars 106/687 van een volledige cirkelomtrek afgelegd ten opzichte van M_1 en op positie A_2 heeft de Aarde 106/365 van een volledige cirkelomtrek afgelegd ten opzichte vanA$_1$. We vinden dat

$$M_2\hat{Z}A_2 = A_1\hat{Z}A_2 - M_1\hat{Z}A_2 = 360° \times \left(\frac{106}{365} - \frac{106}{687}\right)$$



Uiteraard is ook bekend dat $|ZA_2| = 1$ astronomische eenheid.
Derhalve is de afstand van de Zon tot Mars:

$$|ZM_2| = \frac{|ZA_2|}{\cos M_2\hat{Z}A_2} = 1{,}52\,AE$$

Vraag 2.
Een komeet beweegt in een ellipsvormige baan rond de Zon. Op het verste punt van haar baan bevindt ze zich op 31,5 astronomische eenheden van de Zon, en op het dichtste punt is de afstand 0,5 astronomische eenheden.
a) Wat is de periode van deze komeet?

De lengte a van de halve grote as van de komeetbaan is $a = (31{,}5 + 0{,}5) / 2 = 16$ AE. Uit de derde wet van Kepler ($P^2 = a^3$, waarbij P is uitgedrukt in jaar en a in AE) volgt hieruit de periode $P = a^{3/2} = 64$ jaar.

b) Hoe groot is de excentriciteit van de baan van deze komeet?

Voor de periheliumafstand q geldt dat $q = a(1–e)$ en voor de apheliumafstand Q geldt dat $Q = a(1+e)$. Er volgt dat $e = 0{,}96875$.

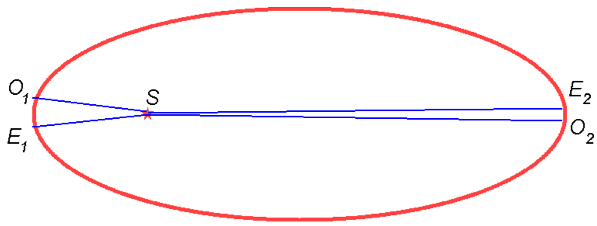
c) Welke oppervlakte wordt bestreken door de verbindingslijn tussen de Zon en de komeet (uitgedrukt in vierkante astronomische eenheden per jaar)?

Zij a de lengte van de halve grote as van de ellips en b de lengte van de halve kleine as van de ellips, dan is de oppervlakte van de ellips te berekenen als πab. Verder is $b = a\sqrt{1-e^2}$ zodat de oppervlakte van de ellips $\pi a^2\sqrt{1-e^2} = 199{,}5$ AE^2. Deze oppervlakte wordt volgens de tweede wet van Kepler gelijkmatig beschreven over de volledige periode P, zodat we vinden dat de oppervlakte die wordt bestreken door de verbindingslijn tussen de Zon en de komeet 3,117 AE^2/jaar bedraagt.

Vraag 3.
Als men een (enkele) reis wil maken van de Aarde naar Mars, dan kan dit met het minst energieverbruik door het ruimtetuig een zogenaamde “bitangentiële” baan te laten volgen. Dit betekent dat het ruimtetuig vertrekt wanneer de Aarde zich in het perihelium van haar baan bevindt, en aankomt bij Mars als deze planeet zich in het aphelium van zijn baan bevindt. De baan van het ruimtetuig raakt dus aan de aardbaan in het perihelium ervan, en aan de Marsbaan in het aphelium ervan. De lengte van de halve grote as van de baan van de Aarde bedraagt 1,000 astronomische eenheid, en bij Mars is dit 1,524 AE.
Bereken hoe lang de beschreven ruimtereis duurt (waarbij de banen van de Aarde en van Mars als cirkelvormig mogen beschouwd worden).

Een zogenaamde ‘bitangentiële’ baan, raakt in het perihelium aan de aardbaan (bij het vertrek) en in het aphelium aan de baan van Mars (bij de aankomst). De halve grote baanas a van de te doorlopen elliptische baan is dan $a = (1{,}000 + 1{,}524) / 2 = 1{,}262$ AE. Uit de derde wet van Kepler volgt hieruit de omlooptijd $P = a^{3/2}$, en de (enkele) reis duurt uiteraard maar de helft van de omlooptijd, dus $P/2 = 0{,}71$ jaar ≈ 259 dagen.

Vraag 4.
Twee kleine exoplaneetjes O en E bewegen in één en dezelfde gesloten baan rond een ster van één zonsmassa. Voor één volledige omwenteling rond deze ster hebben de planeetjes 30 jaar nodig. De afstand tussen de planeetoppervlakken van O en E bedraagt maximaal 10 meter. Op het exoplaneetje O leeft Orpheus en op het exoplaneetje E leeft Eurydice. Orpheus en Eurydice zouden elkaar graag de hand schudden. We nemen aan dat dit mogelijk is als ze elk hun arm hoogstens één meter moeten uitstrekken boven het oppervlak van het planeetje waarop ze leven. Als de baan van O en E perfect cirkelvormig zou zijn, is dat uiteraard niet mogelijk, want dan blijft hun onderlinge afstand steeds dezelfde. Als de baan echter ellipsvormig is, dan kunnen Orpheus en Eurydice elkaar mogelijks wel de hand schudden. Hoe groot moet de excentriciteit van de gemeenschappelijke ellipsvormige baan van O en E minstens zijn opdat Orpheus en Eurydice elkaar de hand zouden kunnen schudden? Voor de berekeningen mag het stukje van de baan tussen O en E als rechtlijnig beschouwd worden.



Volgens de tweede wet van Kepler bewegen de planeetjes O en E het snelst nabij het perihelium van hun baan rond de ster S, en het traagst nabij het aphelium. Hun onderlinge afstand zal dus maximaal zijn nabij het perihelium van hun baan, wat in de figuur (niet op schaal) is weergegeven door de posities O_1 en E_1; we noemen hun onderlinge afstand op dat ogenblik D en er is gegeven dat $D = 10$ meter.
De twee planeetjes zullen elkaar het dichtst kunnen naderen in het aphelium, wat in de figuur is weergegeven door de posities O_2 en E_2; we noemen hun onderlinge afstand op dat ogenblik d en uit de opgave kan afgeleid worden dat $d \leq 2$ meter.
Als a de lengte van de halve lange baanas van de elliptische baan is, en c is de afstand van het middelpunt van de ellips tot het brandpunt, dan is de excentriciteit $e = c / a$. De periheliumafstand is dan $a - c = a - a\,e = a(1-e)$ en de apheliumafstand is $a + c = a + a\,e = a(1+e)$.
Als we nu uitgaan van de veronderstelling dat het traject tussen O_1 en E_1 in dezelfde tijd wordt afgelegd als het traject tussen O_2 en E_2, dan zegt de perkenwet dat de oppervlakte van de driehoeken SO_1E_1 en SO_2E_2 dezelfde moet zijn. Gezien we het stukje baan tussen O en E als rechtlijnig mogen beschouwen, vinden we dat

$$\tfrac{1}{2}\, D\, a\, (1-e) = \tfrac{1}{2}\, d\, a\, (1+e)$$

waaruit we vinden dat

$$d = D\,(1-e) / (1+e)$$

Uit het feit dat $D = 10$ en $d \leq 2$ vinden we dan dat

$$10\,(1-e) \leq 2\,(1+e)$$

of nog $12e \geq 8$, waaruit eenvoudig volgt dat de excentriciteit $e \geq {}^2/_3$.
Merk overigens op de gegeven omlooptijd niet gebruikt is voor het bekomen van de oplossing.

Vraag 5.
Krachtens de eerste wet van Kepler is een planeetbaan ellipsvormig, en staat de Zon in één van de twee brandpunten van de ellips. Daaruit volgt dat de twee uiteinden van de lange as van de ellips overeenkomen met de punten waar de planeet op haar baan het dichtst, respectievelijk het verst van de Zon verwijderd staat. Het perihelium is het punt van dichtste nadering, het aphelium het punt van verste verwijdering.
De ware anomalie ν van een planeet op een gegeven moment is de georiënteerde hoek perihelium–Zon–planeet. De oriëntatie van de hoek wordt zodanig gemeten dat hij toeneemt in de tijd.
De excentrische anomalie E wordt gedefinieerd door de volgende constructie. Zij P’ het punt waar de loodlijn op de lange as van de ellips doorheen de planeet, de omschrijvende cirkel van de ellips snijdt. Dan is E de georiënteerde hoek perihelium–middelpunt–P’.
De middelbare anomalie M is de denkbeeldige hoek die de planeet zou hebben afgelegd op haar baan, als haar hoeksnelheid constant gelijk was aan een volledige cirkel (360° of 2π radialen) gedeeld door de omlooptijd.
Als t–τ de tijd is die verlopen is sinds de periheliumdoorgang van een planeet, en P is de periode van die planeet, dan geldt dat

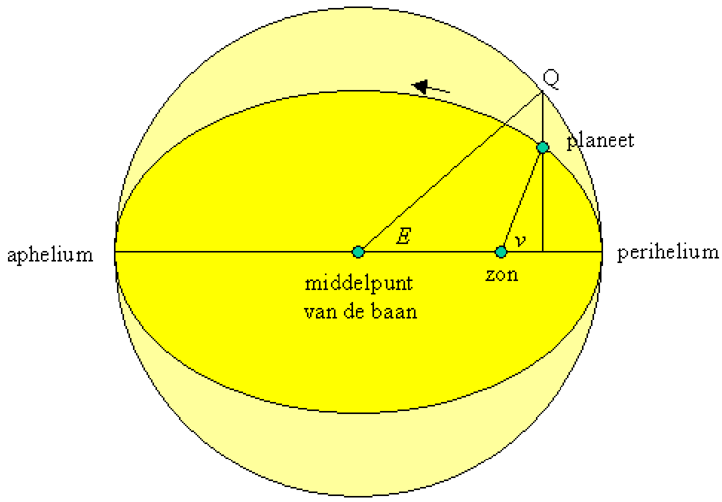
$$M = \frac{2\pi}{P}(t-\tau)$$

Men kan aantonen dat volgend verband geldt:

$$E = M + e\sin E$$

waarbij e de excentriciteit van de ellips voorstelt. Dit wordt de vergelijking van Kepler genoemd.
Verder geldt ook nog dat

$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$



De excentriciteit van de ellipsbaan van de Aarde om de Zon is tegenwoordig 0,0167.
a) Wat is de middelbare anomalie van de Aarde een kwart jaar na de periheliumdoorgang van de Aarde?

In dit geval is $t-\tau = P/4$ waaruit volgt dat $M = \pi / 2 = 90°$.

b) Wat is op dat ogenblik de excentrische anomalie van de Aarde?

Deze waarde dient bepaald te worden aan de hand van de vergelijking van Kepler. Het probleem is dat deze vergelijking eigenlijk niet analytisch oplosbaar is. Het oplossen van de vergelijking

$$E = M + e \sin E$$

gebeurt doorgaans via een iteratief proces. Daartoe zijn diverse methodes beschikbaar. De eenvoudigste methode gaat uit van een eerste benadering E_0 voor de waarde van E. Uitgaande hiervan berekent men dan een betere benadering E_1 als

$$E_1 = M + e \sin E_0$$

Men zet dit proces verder door telkens nieuwe waarden

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n$$

uit voorgaande waarden te berekenen. Dit gaat zo verder tot wanneer E_{n+1} en E_n minder dan de gewenste nauwkeurigheid van elkaar verschillen (waarbij we hier niet ingaan op het al dan niet convergeren van het iteratieproces).
Doorgaans neemt men $E_0 = M$.
In geval $M = \pi / 2 = 90°$ convergeert de vergelijking vrij snel naar

$$E = 1{,}587493999 \text{ rad} = 90{,}9567°.$$

c) Wat is op dat ogenblik de ware anomalie van de Aarde?
De resultaten moeten gegeven worden in graden en tot op twee cijfers na de komma nauwkeurig.

Als ware anomalie ν vinden we

$$\nu = 1{,}6042 \text{ rad} = 91{,}9133°.$$

Open vragenreeks II: sterren

Vraag 1.
Bij welke golflengte straalt een ster met een oppervlaktetemperatuur van 4000 K het meest intens?

De golflengte λ_{max} waarbij een ster van temperatuur T maximaal straalt, kan berekend worden met de verschuivingswet van Wien: $\lambda_{max}.T = b$ waarbij $b = 2{,}897756 \cdot 10^{-3}$ K·m. Voor T = 4000 K bekomen we $\lambda_{max} = 2{,}897756 \cdot 10^{-3}$ K·m / 4000 K = $7{,}244 \cdot 10^{-7}$ m = 724 nm.

Vraag 2.
Bereken de totale lichtkracht van een ster met een oppervlaktetemperatuur van 7500 K en met een straal die 2,5 keer groter is dan de straal van de Zon. Vergelijk dit met de lichtkracht van de Zon (waarvan de oppervlaktetemperatuur 5800 K bedraagt).

De wet Stefan-Boltzmann geeft het verband tussen de lichtkracht L van een zwarte straler, en de straal R en de temperatuur T ervan, volgens $L = 4\pi R^2\, \sigma T^4$ waarbij $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} de constante van Stefan-Boltzmann (of eerste stralingsconstante) is. Vergelijken we de lichtkracht L_* van de ster met de lichtkracht $L_\odot$ van de Zon, dan verkrijgen we

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \frac{4\pi R_*^2}{4\pi R_\odot^2}\frac{\sigma T_*^4}{\sigma T_\odot^4} = \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{T_*}{T_\odot}\right)^4 = (2{,}5)^2\left(\frac{7500}{5800}\right)^4 = 17{,}47$$

zodat $L_* \approx 17{,}5\, L_\odot$.

Vraag 3.
Een ster op de hoofdreeks van spectraaltype K heeft een lichtkracht van 0,4 keer de lichtkracht van de Zon ($0{,}4\, L_\odot$). De waargenomen flux van deze ster bedraagt $6{,}235 \cdot 10^{-14}$ W.m^{-2}. Wat is de afstand tot deze ster (waarbij atmosferische effecten mogen verwaarloosd worden)?

Zij S = de fluxdichtheid van de sterstraling op Aarde
d = de afstand van de Aarde tot de ster
L = de totale lichtkracht van de ster

Om de totale lichtkracht van de ster te bepalen, moeten we fluxdichtheid van de sterstraling op Aarde vermenigvuldigen met de oppervlakte van een bol met als straal de afstand van de Aarde tot de Zon, zodat

$$L = S \times 4\,\pi\, d^2$$

Hieruit volgt dat

$$d^2 = L / (4\,\pi\, S)$$

Aangezien de lichtkracht van de Zon $L_\odot = 3{,}826 \cdot 10^{26}$ W, vinden we dat

$$d^2 = (0{,}4 \times 3{,}826 \cdot 10^{26}\ \text{W}) / (4\,\pi \times 6{,}235 \cdot 10^{-14}\ \text{W.m}^{-2})$$

zodat $d = 1{,}398 \cdot 10^{19}$ m $\approx$ 453 parsec.

Vraag 4.
Een supernova heeft een absolute lichtkracht die 10^{10} keer groter is dan de lichtkracht van de Zon. Veronderstel dat we dergelijke supernova aan de hemel zouden waarnemen en dat die even helder zou schijnen als de Zon.
a) Hoever zou dergelijke supernova zich van ons bevinden?

Zij S = de fluxdichtheid van de supernovastraling op Aarde
d = de afstand van de Aarde tot de supernova
a = de afstand van de Aarde tot de Zon
L = de totale lichtkracht van de supernova
$L_\odot$ = de totale lichtkracht van de Zon

Er geldt dat

$$L = S \times 4\pi d^2$$

zodat

$$S = L / 4\pi d^2$$

Om even helder te schijnen als de Zon, zou dit betekenen dat ook

$$S = L_\odot / 4\pi a^2$$

Aldus is $(d / a)^2 = L / L_\odot = 10^{10}$, waaruit volgt dat $d / a = 10^5$
of dus d = 10^5 AE ≈ 0,485 pc ≈ 1,58 lichtjaar.

b) Is dit een realistische mogelijkheid?

De gevonden afstand is kleiner dan de afstand van de meest nabije ster (na de Zon), zodat dit geen realistische mogelijkheid is.

Vraag 5.
We bestuderen een bepaald type rode reuzensterren als zogenaamde standaardkaarsen met een constante absolute magnitude M = –0,2. Neem aan dat we beschikken over een telescoop waarvan de grensmagnitude m = 18 bedraagt, wat is dan de maximale afstand waarop deze telescoop de genoemde rode reuzensterren nog kan waarnemen
a) in het geval we de interstellaire extinctie verwaarlozen?

Zij d de gezochte afstand uitgedrukt in parsec, dan geldt dat

$$M = m + 5 - 5 \log d$$

zodat $d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 4{,}37 \cdot 10^4$ pc.

b) uitgaande van de veronderstelling dat de extinctie in het interstellaire medium 0,70 magnituden per kiloparsec bedraagt?

Als we de interstellaire absorptie in rekening brengen, dan verandert voorgaande formule in

$$M = m + 5 - 0{,}0007\, d - 5 \log d$$

met d nog steeds uitgedrukt in parsec.
Uit het voorgaande luik kennen we uiteraard een minimale waarde voor d. Enkele mogelijke waarden voor d leveren volgende resultaten voor M:

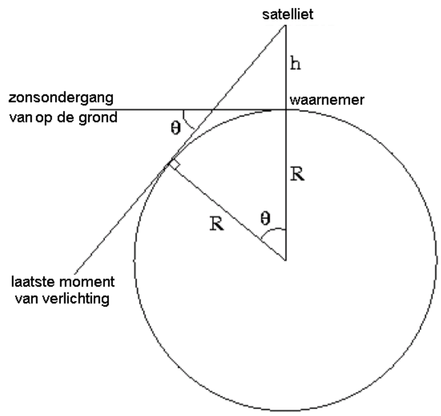
d	M
5000	+1,01
5500	+0,45
6000	–0,09
6100	–0,20
6200	–0,30
6300	–0,41
6400	–0,51
6500	–0,61

We stellen vast dat d ≈ 6100 pc een behoorlijke schatting is om M = –0,2 te bekomen.

Open vragenreeks III: sterrenkundige waarnemingen

Vraag 1.
Op een heldere avond probeert een waarnemer vanuit zijn tuin een polaire satelliet waar te nemen. Een dergelijke satelliet bevindt zich typisch zowat 800 kilometer boven het aardoppervlak. Tot hoe lang na zonsondergang is dergelijke waarneming eventueel mogelijk:
a) 63 minuten
b) 109 minuten
c) 127 minuten
d) 171 minuten
Het antwoord dient met een berekening gestaafd te worden. Daarbij moet echter geen rekening gehouden worden met fenomenen als straalbreking of kimduiking.

De hoogte van de baan van een polaire satelliet is zowat 800 kilometer. Na zonsondergang zal het zonlicht de satelliet nog een tijdlang bereiken (θ / ω), waarbij ω de hoeksnelheid is van de aarde en waarbij θ de hoek is, zoals aangeduid op de figuur hiernaast. Zoals bekend is ω = 15°/uur.

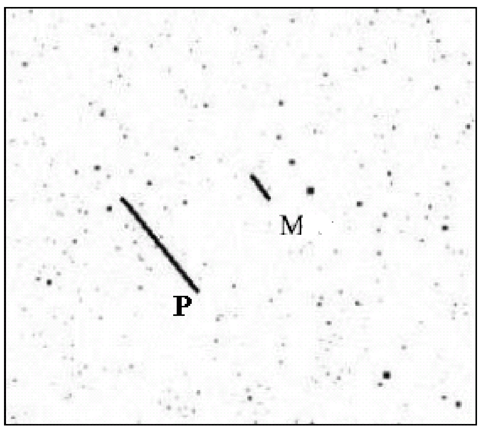


Uit de figuur volgt:

$$\cos\theta = R / (R+h)$$

waarbij dus $h = 8\cdot10^5$ m en $R = 6{,}4\cdot10^6$ m de straal van de Aarde voorstelt.
We vinden θ = 27,3°. Aangezien deze hoek net iets minder is dan 30°, levert dit een tijdsinterval van iets minder dan 2 uur op.

Vraag 2.
Op het beeld rechts zien we de beweging van twee planetoïden M en P tussen de sterren. Er werd gevolgd op de sterren zodat M en P een spoor nalaten. Veronderstel dat beide planetoïden zich in ongeveer cirkelvormige banen in hetzelfde baanvlak bewegen.
a) Welke planetoïde bevindt zich op het ogenblik van deze opname het dichtst bij de Aarde?



Beide planetoïden bevinden zich ongeveer in hetzelfde baanvlak en min of meer in dezelfde kijkrichting (gezien ze zich in hetzelfde beeldveld bevinden). Planetoïde P bevindt zich het dichtste bij de Aarde, aangezien zijn spoor het langste is.

b) Welke planetoïde bevindt zich op het ogenblik van deze opname het dichtst bij de Zon?
De antwoorden dienen met een duidelijke redenering gestaafd te worden.

Als deze twee planetoïden deel uitmaken van de planetoïdengordel verwachten we dat ze ongeveer even ver van de Zon staan (en dat de Zon in het middelpunt staat van hun als min of meer cirkelvormig veronderstelde baan). Aangezien we ze beide kunnen zien, moeten ze ongeveer in de zelfde richting staan en aangezien we ze 's nachts kunnen waarnemen moet het ook aan de kant zijn dat de Aarde donker is. Bijgevolg is het eveneens planetoïde P die zich het dichtst bij de Zon bevindt.

Vraag 3.
Astronomen nemen met de Hubble Space Telescope (die een diameter van 2,4 meter heeft) een sterrenstelsel waar. De afstand van dit stelsel tot ons bedraagt 15 Mpc. Het sterrenstelsel beweegt weg van ons met een snelheid van 3500 km/s en de hoekdiameter bedraagt 2'. Vanop de Aarde kijken we recht in de schijf van het sterrenstelsel. Met behulp van spectroscopie kan men de roodverschuiving van de Hα-lijn (656,285 nm) bepalen aan de randen van het sterrenstelsel (verschuiving van 3,88 nm aan de ene kant en verschuiving van 1,52 nm aan de andere kant)
a) Hoeveel jaar dient men met de Hubble Space Telescope dit sterrenstelsel waar te nemen vooraleer men een verandering in zijn positie kan waarnemen? De beweging van de Aarde om de Zon dien je niet in rekening te brengen.

We kunnen eerst de radiële snelheid bepalen; dit kan door de gemiddelde v_r te nemen van de snelheden waarmee de randen van ons radieel wegbewegen.

$$v_{r1} = c\,(\lambda - \lambda_0) / \lambda_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} \times 3{,}88 \text{ nm} / 656{,}285 \text{ nm} = 1{,}77 \cdot 10^3 \text{ km/s}$$
$$v_{r2} = c\,(\lambda - \lambda_0) / \lambda_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} \times 1{,}52\text{nm} / 656{,}285 \text{ nm} = 0{,}695 \cdot 10^3 \text{ km/s}$$

We bekomen $v_r = 1{,}23 \cdot 10^3$.
Daarna berekenen we de tangentiële snelheid:

$$v_t^2 = v^2 - v_r^2 = (3500 \text{ km/s})^2 - (1230 \text{ km/s})^2$$

zodat $v_t = 3{,}277$ km/s.
De diffractielimiet legt een beperking op de resolutie (met D de diameter van de telescoop):

$$\theta = 1{,}12\ \lambda/D = 1{,}22 \times 656{,}285 \cdot 10^{-9} \text{ m} / 2{,}4 \text{ m} = 3{,}336 \cdot 10^{-7}$$

Dit komt overeen met een tangentiële afstand:

$$x = d \sin\theta \sim d\theta = 15 \text{ Mpc} \times 3{,}336 \cdot 10^{-7} = 1{,}54 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

Dan is verder

$$\Delta t = x / v_t = 4{,}71 \cdot 10^{10} \text{ seconde} = 1493 \text{ jaar}$$

b) Bereken de massa van dit stelsel (in zonsmassa's).

De straal van het stelsel bedraagt:

$$R \sim d \cdot \varphi = 15 \text{ Mpc} \times 2.91 \cdot 10^{-4} = 4{,}36 \cdot 10^3 \text{ Mpc} = 1{,}35 \cdot 10^{17} \text{ km}$$

Waarbij gebruik gemaakt is van $\varphi = 1' = 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ rad.
Uit $v_c = 2\pi R/P$ bekomen vervolgens de periode P van de rotatie:

$$P = 2\pi R / v_c = 1.567 \cdot 10^{15} \text{ seconde want } v_c = (1{,}77 - 1{,}23) \cdot 10^3 \text{ km/s}$$

Uit de derde wet van Kepler volgt nu dat

$$\mu = (2\pi)^2\ a^3\ /P^2 = 3.958 \cdot 10^{31}\ \text{nm}^2 = GM$$

zodat

$$M = (3{,}958 \cdot 10^{31} / 6{,}673 \cdot 10^{-11})\ \text{kg} = 5{,}931 \cdot 10^{41}\ \text{kg} = 2{,}98 \cdot 10^{11}\ M_\odot$$

c) Gegeven is de volgende massa-lichtkrachtrelatie: $(L/L_\odot) = (M/M_\odot)^3$. Bepaal de schijnbare magnitude van het systeem.

We vinden dat

$$L/L_\odot = (M/M_\odot)^3 = (2{,}98 \cdot 10^{11})^3$$

zodat voor de absolute magnitude geldt dat

$$M_x – M_{0,x} = –2{,}5\ \log(L_x/L_0)$$

en vervolgens

$$M_x = M_{0,x} – 2{,}5\ \log((2{,}98 \cdot 10^{11})^3) = –81{,}2266$$

De schijnbare magnitude vinden we nu uit

$$m_x = M_x + 5\ \log d – 5$$

waarbij d uitgedrukt is in parsec, zodat

$$m_x = –81{,}2266 – 5 + 5\ \log(15 \cdot 10^6) = –50{,}346$$

d) Met het blote oog (pupildiameter 6 mm) kan men nog net een object waarnemen met een schijnbare magnitude 6. Gebruik dit gegeven om de minimale diameter te bepalen van de telescoop die we nodig hebben om dit sterrenstelsel te kunnen waarnemen.

We kunnen een object met schijnbare magnitude groter dan 6 niet waarnemen, dit is nu niet het geval omdat het sterrenstelsel nu helderder is dan magnitude 6 zal het dus wel met het blote oog zichtbaar zijn.
Het vermogen dat invalt van een object met stralingsflux op het oog is:

$$W = f_x \cdot \pi(d_{oog}/2)^2$$

In het geval dat er niet genoeg vermogen zou invallen op het oog, moeten we f_x opdrijven om het stelsel te kunnen waarnemen. Hoeveel keer?
Uit

$$m'_x – m_x = –2{,}5\ \log(f'_x/f_x)$$

volgt dat

$$f'_x = f_x \times 10^{(m'x – mx) / –2,5} = f_x \times 10^{(mx – m'x) / 2,5}$$

waaruit

$$f'_x = f_x \times 10^{(–50,346 – 6) / 2,5} = f_x \times 2{,}8946 \cdot 10^{–23}$$

Als we een bepaald vermogen opvangen met de telescoop met oppervlakte $\pi D^2/4$ en vervolgens herverdelen over het oppervlak van het oog $\pi\ d_{oog}^2/4$, dan kunnen we de gewenste verhoging van f_x bekomen.
Aldus:

$$(\pi D^2/4) / (\pi\ d_{oog}^2/4) = 2{,}8946 \cdot 10^{–23}$$

zodat

$$D^2 = 2{,}8946 \cdot 10^{–23}\ d_{oog}^2$$

en dus

$$D = 5{,}38021957 \cdot 10^{–12}\ d_{oog} = 3{,}228 \cdot 10^{–14}\ \text{m}$$

Opmerking:
De magnitudes die we bekomen in puntje c) en de diameter in puntje d) zijn – zoals de aandachtige lezer waarschijnljik zal opgemerkt hebben – niet echt realistisch. Dit is omdat de formule voor de massa-lichtkrachtverhouding die in de opgave staat de verhouding is tussen de massa en de lichtkracht van individuele sterren. De formule die er had moeten staan is de verhouding tussen de totale massa van een sterrenstelsel afgeleid uit de rotatiecurve van het sterrenstelsel en de totale lichtkracht die door het sterrenstelsel wordt uitgezonden en die een maat is voor de massa aan sterren die aanwezig is in het sterrenstelsel die we meten voor dit sterrenstelsel:

$$M/L = 2{,}3\ M_\odot/L_\odot$$

Bij gebruik van deze laatste formule bekomt men

$$L/L_\odot = M\ /\ (2{,}3\ M_\odot) = 1{,}29565 \cdot 10^{11}$$

Vervolgens verkrijgt men uit

$$M_x – M_{0,x} = –2{,}5\ \log(L_x/L_0)$$

dat

$$M_x = M_{0,x}\ – 2{,}5\ \log((1{,}296 \cdot 10^{11})^{\,3}) = –22{,}9$$

en dan verder

$$m_x = M_x + 5\ \log d – 5 = 7{,}98$$

Voor puntje c) hebben we dan te maken met een object met schijnbare magnitude groter dan 6, dat dus niet langer waarneembaar is met het blote oog, omdat in dat geval niet genoeg vermogen invalt op het oog. We bekomen nu

$$f'_x = f_x \times 10^{(m'x – mx)\ /\ –2{,}5} = f_x \times 10^{(7{,}98 – 6)\ /\ 2{,}5} = f_x \times 6{,}19$$

Als we een bepaald vermogen opvangen met de telescoop met oppervlakte $\pi D^2/4$ en vervolgens herverdelen over het oppervlak van het van het oog $\pi\ d_{oog}{}^2/4$, dan kunnen we de gewenste verhoging van f_x bekomen:

$$(\pi D^2/4)\ /\ (\pi\ d_{oog}{}^2/4) = 6{,}19$$

zodat

$$D = 1{,}5\ \text{cm}$$

Open vragenreeks IV: exoplaneten

De detectie van exoplaneten (planeten die rond een andere ster dan onze Zon draaien) is de laatste jaren een hot topic in de sterrenkunde. Vooral de zoektocht naar planeten die ongeveer even groot zijn als onze Aarde, die ongeveer dezelfde massa hebben, en die op de juiste afstand van hun ster staan om vloeibaar water mogelijk te maken, spreekt tot de verbeelding. Om de mogelijkheden en moeilijkheden van zo'n zoektocht te illustreren, bekijken we twee verschillende manieren waarop een veraf wonende intelligente beschaving onze Aarde zou kunnen detecteren.

Vraag 1.
Stel je voor dat deze beschaving continu het licht van onze Zon opmeet en vaststelt dat één keer per (aard)jaar gedurende een bepaalde tijd dit licht een klein beetje afneemt, omdat de Zon voor hen gedeeltelijk verduisterd wordt door de Aarde.
a) Met welke nauwkeurigheid moet hun instrument de verandering in de lichtkracht van de Zon kunnen vaststellen, om de Aarde in de eerste plaats te kunnen ontdekken? Ter vergelijking: de Kepler-satelliet, de beste planetenjager van onze beschaving, kan een lichtverandering van één vijftigduizendste waarnemen.

De lichtkracht van de Zon die de buitenaardse beschaving waarneemt, is evenredig met de oppervlakte van de zonneschijf. Wanneer vanuit hun standpunt gezien de Aarde voor de Zon komt, neemt deze oppervlakte dus af met deze van de aardschijf. Aangezien de beschaving zich op zeer grote afstand bevindt, en de afstand van hen tot de Aarde, respectievelijk de Zon, dus gelijk is, is de verhouding van de oppervlakten gewoon bepaald door de verhouding van stralen:

$$\frac{A_A}{A_Z} = \frac{\pi R_A^2}{\pi R_Z^2} = \frac{\left(6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}\right)^2}{\left(6{,}96 \cdot 10^8 \text{ m}\right)^2} = \frac{1}{11900}$$

De lichtkracht van de Zon verandert dus met ongeveer één twaalfduizendste, wat slechts een nauwkeurigheid vereist vier keer kleiner dan wat de Kepler-satelliet aankan.

b) Gebruik makend van het spectrum van de Zon, kan de buitenaardse beschaving vaststellen dat de Zon een zogenaamde G2 hoofdreeksster is. Geef een korte uitleg over deze indelingsmethode, en bespreek welke fysische kenmerken van de Zon dan daaruit volgend bij benadering gekend zijn.

De G2-classificatie is het zogenaamde spectraaltype van de Zon. Dit is een maat voor de golflengte waarbij de piek van het spectrum van de zon ligt, dit wil zeggen de golflengte λ_{max} waarbij het grootste deel van het licht wordt uitgezonden. Volgens de wetten van de zwarte stralers is er ook een eenduidig verband tussen de λ_{max} en de temperatuur van een ster. Van hoge naar lage temperatuur, overeenstemmend met van blauwe naar rode kleur (en zelfs een stukje buiten het zichtbaar licht) spreekt men van de spectraaltypes O, B, A, F, G, K en M. Binnen elke letter X wordt de categorie verder onderverdeeld van X1 tot X9. De spectraalklasse van de Zon, G2, stemt overeen met een ster die haar λ_{max} heeft liggen bij een golflengte van 502 nm. Dit stemt

overeen met groen licht, maar omdat er ook bijdragen zijn van hogere en lagere golflengten, letterlijk alle kleuren van de regenboog, is het uiteindelijke resultaat geelachtig wit. Het feit dat het menselijke oog gevoelig is voor de golflengten daarrond (400 nm, violet, tot 750 nm, rood, het zogenaamde zichtbare spectrum) is natuurlijk een biologisch-evolutionair gevolg van het feit dat onze lichtbron daar haar λ_{max} heeft.
Dat de Zon een hoofdreeksster is, betekent dat ze zich in haar 'volwassen leven' bevindt, de tijd gedurende dewelke ze haar energie opwekt door waterstofverbranding in de kern. De hoofdreeks is waar een ster zo'n 90% van haar leven doorbrengt, voorbeelden van andere levensfasen zijn rode reuzen en superreuzen. Van zodra men weet dat een ster een hoofdreeksster is (men spreekt ook wel van lichtkrachtklasse V), is er ook een eenduidig verband tussen haar temperatuur (dus spectraalkasse), massa, straal en lichtkracht. Dankzij die verbanden zijn, van zodra geweten is dat de zon een type G2V ster is, (bij benadering) deze eigenschappen van de zon gekend.

c) In het bijzonder is de kennis van de massa van de Zon zeer interessant. Hieruit kan men dan namelijk de afstand berekenen tussen de Aarde en de Zon. Doe dit (uiteraard zonder gebruik te maken van je voorkennis over deze afstand). Tip: maak gebruik van de tweede wet van Newton (F = m.a), waarbij je weet dat de kracht geleverd wordt door de zwaartekracht, en de versnelling zodanig is dat de Aarde een (in zeer goede benadering) eenparig cirkelvormige beweging uitvoert rond een veel zwaarder lichaam.

Door gebruik te maken van de tweede wet van Newton $F = ma$, en de kennis dat de kracht geleverd wordt door de zwaartekracht, volgens de gravitatiewet van Newton gelijk aan $F = G\frac{M_A M_Z}{r_{A-Z}^2}$ met G de universele gravitatieconstante, M_A en M_Z de massa's van Aarde en Zon, en r_{A-Z} de afstand tussen beiden, volgt:

$$M_A a = G\frac{M_A M_Z}{r_{A-Z}^2}$$

Wanneer een object in (benaderde) eenparig cirkelvormige beweging is rond een veel zwaarder object, geldt dat de centripetale (middelpuntszoekende) versnelling moet gelijk zijn aan de tangentiële snelheid in het kwadraat, gedeeld door de straal van de cirkel (i.e. de afstand tussen de objecten). Bijgevolg:

$$\frac{v^2}{r_{A-Z}} = G\frac{M_Z}{r_{A-Z}^2}$$

Gebruik makend van de definitie van de snelheid bij een eenparig cirkelvormige beweging, als functie van de omlooptijd T:

$$\left(\frac{2\pi r_{A-Z}}{T}\right)^2 = G\frac{M_Z}{r_{A-Z}}$$

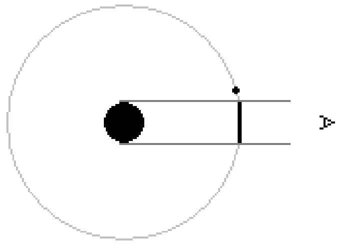
Tenslotte volgt:

$$r_{A-Z} = \sqrt[3]{\frac{GM_Z T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ \text{SI}\cdot 1,99\cdot 10^{30}\ \text{kg}\cdot (365\cdot 86400\ \text{s})^2}{4\pi^2}} = 1,49\cdot 10^{11}\ \text{m}$$

Wat de bekende 150 miljoen kilometer zeer goed benadert.

d) Ook de tijd gedurende dewelke de planeet zich voor de ster bevindt kan gebruikt worden om een limiet op deze afstand te plaatsen. Is dit een boven- of ondergrens? Maak een benadering van hoe lang deze 'verduistering' in het geval van de Aarde maximaal kan duren.

Veronderstel dat vanuit het standpunt van de (verre) waarnemer de Aarde de ganse zonnediameter overloopt, via het middelpunt van de zonneschijf. In dat geval verhoudt de tijd die ze zich ervoor bevindt tot de omlooptijd zich zoals de diameter van de Zon tot de omtrek van de aardbaan (zie figuur). Hierbij hebben we het stukje van de cirkelbaan die de Aarde aflegt terwijl ze zich voor de Zon bevindt (terecht) benaderd als een lijnstuk. Dus:



$$\frac{\Delta t_{eclips}}{T} = \frac{2R_Z}{2\pi r_{A-Z}}$$

Wat voor de maximale duur van de eclips geeft:

$$\Delta t_{eclips} = \frac{R_Z T}{\pi r_{A-Z}} = \left(\frac{6{,}96 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot 365 \cdot 86400 \text{ s}}{\pi \cdot 1{,}49 \cdot 10^{11} \text{ m}} \right) = 46700 \text{ s}$$

oftewel iets minder dan 13 uur.

Aangezien het niet gegarandeerd is dat de planeet de ganse diameter van de ster zal overlopen (ze kan evengoed slechts een klein stukje nabij de rand van de schijf overbruggen), is de duur van de eclips een maximumwaarde. Wanneer men uit de gemeten duur de (onbekende) afstand Aarde-Zon zou berekenen levert dit daarvoor dus een minimumwaarde, aangezien deze hiermee omgekeerd evenredig is.

Vraag 2.

Een andere manier waarop de aanwezigheid van de Aarde in principe kan vastgesteld worden, is gebruik makend van het dopplereffect.

a) Leg kort het principe van dit effect uit, gebruik makend van geluidsgolven.

Het dopplereffect is het effect dat er bij geluidsgolven voort zorgt dat een stilstaande waarnemer bij een naderende geluidsbron een hogere geluidsfrequentie waarneemt dan bij een zich verwijderende.

Kwantitatief wordt het effect beschreven door:

$f_W = \frac{v_G \pm v_W}{v_G \pm v_B} f_B$, waarbij f_W en f_B respectievelijk de waargenomen en bronfrequentie zijn, en v_G, v_W en v_B de snelheden van het geluid, de waarnemer en de bron (allen ten opzichte van de stilstaande lucht). Plus- en mintekens in de breuk moeten zodanig gekozen worden dat een relatieve beweging van bron en waarnemer naar elkaar toe een frequentievergroting veroorzaakt, en een relatieve beweging van elkaar weg een frequentiedaling.

b) Het Dopplereffect is ook werkzaam op elektromagnetische golven, zoals zichtbaar licht. Door het speciale karakter van licht (zie de speciale relativiteitstheorie van Einstein) mogen echter niet zomaar dezelfde formules als voor geluid gebruikt worden. Zoek op (zonder bewijs) wat de formules dan worden voor licht.

De reden dat voor licht een relativistische formule nodig is, en deze voor geluidsgolven niet van toepassing is, is de bijzondere eigenschap van het licht dat de lichtsnelheid voor alle waarnemers, onafhankelijk van hun snelheid, gelijk is aan $c = 2{,}99 \cdot 10^8$ m/s. De frequentie van het licht waargenomen door de waarnemer (f_W) wordt gegeven als functie van de frequentie van het licht uitgezonden door de bron (f_B) door de relatie:

$$f_W = \sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}} f_B$$

Hierin is v de relatieve snelheid tussen bron en waarnemer (positief als ze van elkaar weg bewegen) en c de lichtsnelheid.

c) Hoe snel moet een lichtbron bewegen vooraleer het resultaat bekomen voor een stilstaande waarnemer met de klassieke formule (die voor geluid) meer dan 1 % begint af te wijken van de relativistische formule?

Om dit te weten te komen, dient men gewoon via beide formules de dopplerverschuiving te berekenen (bijvoorbeeld voor een zich verwijderende bron), en na te gaan vanaf welke bronsnelheid v deze twee resultaten meer dan 1% beginnen verschillen.
Met andere woorden:

$$f_{W,K} = \frac{c}{c+v} f_B$$

$$f_{W,R} = \sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}} f_B$$

De gezochte v is deze waarvoor geldt dat $\frac{|f_{W,K} - f_{W,R}|}{\min(f_{W,K}, f_{W,R})} = 0{,}01$, en dit blijkt het geval te zijn voor $v = 42000$ km/s.
Aangezien dit al een zeer respectabele snelheid is, nog nooit door de mens bereikt (de Apollo-maanmissies haalden zo'n 40000 km/**h**), blijkt dat de klassieke formule enkel ontoereikend is wanneer werkelijk de snelheid van het licht benaderd wordt.

d) Stel je voor dat een ruimteschip als buitenverlichting licht gebruikt met een golflengte van 580 nm (geel). Welke kleur lijkt dit licht dan te hebben (motiveer!) voor een stilstaande waarnemer die het ruimteschip met een snelheid van 70000 km/s

i. naar zich ziet toevliegen?
ii. van zich ziet wegvliegen?

Aangezien $\lambda = c/f$, wordt in beide respectieve gevallen de waargenomen golflengte gegeven door:

- naderend: $\lambda_W = \sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}\lambda_B = \sqrt{\frac{1+\left(-7{,}00\cdot10^7/2{,}99\cdot10^8\right)}{1-\left(-7{,}00\cdot10^7/2{,}99\cdot10^8\right)}}580\text{ nm} = 457\text{ nm}$.

  Dit stemt overeen met blauw licht, vandaar de naam ‘blauwverschuiving’.
- verwijderend: $\lambda_W = \sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}\lambda_B = \sqrt{\frac{1+\left(7{,}00\cdot10^7/2{,}99\cdot10^8\right)}{1-\left(7{,}00\cdot10^7/2{,}99\cdot10^8\right)}}580\text{ nm} = 736\text{ nm}$.

  Dit stemt overeen met rood licht, vandaar de term ‘roodverschuiving’.

e) Leg kort uit hoe dit principe kan gebruikt worden om te bepalen hoe snel een ster zich van ons af of naar ons toe beweegt. Men weet immers niet zomaar welke kleur het licht van de ster had toen het uitgezonden werd.

Dit kan met behulp van de zogenaamde spectraallijnen, donkere absorptielijnen in het voor de rest continue spectrum van een ster. Deze worden veroorzaakt doordat welbepaalde golflengten λ uit het spectrum weggefilterd (geabsorbeerd) worden, namelijk deze waarvan de fotonen een energie-inhoud E hebben (gelinkt via Einsteins $E = hc/\lambda$, met h de constante van Planck) die atomen in de buitenste lagen van de ster een elektronsprong kunnen doen uitvoeren. Elke spectraallijn in een sterspectrum is dus kenmerkend voor een welbepaalde elektronsprong in een welbepaald chemisch element. Dit laat niet enkel toe om de chemische samenstelling van een ster af te leiden uit haar spectrum, maar wanneer men de golflengten van de spectraallijnen van een bepaald chemisch element in rust in het labo meet, en deze dan vergelijkt met die van hetzelfde chemisch element in het sterrenspectrum, kan men zeer nauwkeurig een eventuele dopplerverschuiving van de lijnen vaststellen.

Vraag 3.
Stel dat de buitenaardse beschaving deze techniek wil gebruiken om het bestaan van de Aarde aan te tonen. In tegenstelling tot wat we in een vorige vraag bij benadering gebruikt hebben, is het namelijk niet helemaal correct dat de Aarde rond de Zon draait: in feite draaien ze beiden rond hun gemeenschappelijk massamiddelpunt. Op die manier zorgt de aanwezigheid van de Aarde voor een kleine beweging van de Zon.
a) Wat kan je zeggen over de invloed van de oriëntatie van het vlak waarin Aarde en Zon bewegen, ten opzichte van de richting waarin de waarnemer zich bevindt?

Wanneer het vlak waarin Aarde en Zon om elkaar draaien loodrecht staat op de gezichtslijn van de buitenaardse beschaving, dan zullen ze het bestaan van de Aarde nooit op deze manier kunnen vaststellen: de rotatie veroorzaakt dan immers geen beweging in de gezichtsrichting (radiële snelheid), en bijgevolg geen dopplereffect. Wanneer echter de gezichtslijn in het vlak valt waarin de rotatie plaatsvindt dan is het effect maximaal: op het moment dat de zon recht naar de waarnemer toe (respectievelijk weg) beweegt, is de radiële snelheid gelijk aan de bewegingssnelheid van de zon rondom het massamiddelpunt, en bijgevolg is het dopplereffect maximaal. Een hoek tussenin zal een intermediaire situatie geven.

b) Bereken hoe groot de golflengteverandering is die de instrumenten in het meest gunstige geval minstens moeten kunnen waarnemen.

In het meest gunstige geval bevindt de gezichtslijn van de buitenaarde beschaving zich in het vlak waarin Aarde en Zon rond elkaar draaien: in dat geval is de radiële snelheid van de Zon (de snelheid in de gezichtsrichting) maximaal en, op het moment dat de Zon zich recht naar of weg van de waarnemer beweegt, gelijk aan diens tangentiële snelheid. Deze wordt gegeven door, met r_Z de straal van de cirkelbeweging die de Zon uitvoert rondom het massamiddelpunt van het systeem Aarde-Zon:

$$v = \frac{2\pi r_Z}{T} = \frac{2\pi}{T}\frac{M_A r_{A-Z}}{M_Z + M_A} = \frac{2\pi}{T}\frac{5,97\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 1,49\cdot 10^{11}\ \text{m}}{1,99\cdot 10^{30}\ \text{kg} + 5,97\cdot 10^{24}\ \text{kg}}$$

$$= \frac{2\pi}{365\cdot 86400\ \text{s}} 4,49\cdot 10^{5}\ \text{m} = 0,0894\ \text{m/s}$$

Wanneer deze bronsnelheid in de relativistische dopplervergelijking ingevuld wordt, levert dit als relatieve golflengteverandering:

$$\frac{\left|\lambda_W - \lambda_B\right|}{\lambda_B} = \left|\frac{\sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}\lambda_B - \lambda_B}{\lambda_B}\right| = \left|\sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}} - 1\right|$$

$$= \sqrt{\frac{1+\left(0,0894/2,99\cdot 10^{8}\right)}{1-\left(0,0894/2,99\cdot 10^{8}\right)}} - 1 = 2,99\cdot 10^{-10}$$

Wat een extreem kleine variatie is, maar toch slechts ongeveer 10 keer te klein om met aardse technologie meetbaar te zijn.

c) Leg uit waarom deze methode in de praktijk enkel werkt voor planeten die niet extreem veel minder massa hebben dan hun ster.

Uit de vorige afleiding blijkt dat hoe zwaarder de planeet is in vergelijking tot de ster, hoe verder van het middelpunt van de ster het massamiddelpunt van het systeem zal liggen. Wanneer dit verder van de ster afligt, zal deze een grotere baan rondom dit punt beschrijven en bijgevolg een grotere tangentiële snelheid hebben, die een grotere dopplerverschuiving tot gevolg heeft.

d) Omwille van de hoger geformuleerde bedenking (vraag 3 a) kan deze methode enkel gebruikt worden om een ondergrens te bepalen voor de massa van de planeet. Stel dat een waarnemer met voldoende nauwkeurige apparatuur zich op een hoek van 45° bevindt ten opzichte van het vlak waarin Aarde en Zon om elkaar draaien. Welke golflengteverschuiving neemt deze dan waar? Wat is de daaruit bepaalde minimale massa van de Aarde?

Bij een hoek van 45° tussen de gezichtslijn en het vlak waarin aarde en zon rond elkaar draaien, zal de radiële snelheid v_r van de Zon voor onze waarnemer kleiner zijn dan de tangentiële snelheid v_t van de zon in haar baan rondom het massamiddelpunt. Het verband tussen beide wordt gegeven door:

$$v_r = v_t \cos 45° = 0,0894 \text{ m/s} \cdot \cos 45° = 0,0632 \text{ m/s}$$

Wanneer dit in de dopplervergelijking wordt ingevoerd, levert dit een golflengteverandering van $2,11 \cdot 10^{-10}$, dus kleiner dan in het beste scenario. Indien men uit deze meting de (minimale) massa van de Aarde zou gaan berekenen, bekomt men eerst voor de afstand tussen het centrum van de zon en het massamiddelpunt van het Aarde-Zon systeem:

$$r_z = \frac{vT}{2\pi} = \frac{0,0632 \text{ m/s} \cdot 365 \cdot 86400 \text{ s}}{2\pi} = 3,17 \cdot 10^5 \text{ m}$$

En dan uiteindelijk voor de massa van de Aarde:

$$M_A = \frac{M_Z r_Z}{r_{A-Z} - r_Z} = \frac{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 3,17 \cdot 10^5 \text{ m}}{1,49 \cdot 10^{11} \text{ m} - 3,17 \cdot 10^5 \text{ m}} = 4,22 \cdot 10^{24} \text{kg}$$

Dit is uiteraard een stuk kleiner dan de werkelijke waarde, maar nog wel een goede bepaling van de grootte-orde.

Open vragenreeks V: supernovae

Supernova's behoren tot de meest energetische gebeurtenissen in het heelal.

Vraag 1.
Sterrenkundigen maken dikwijls onderscheid tussen sterren en fenomenen op basis van waarnemingen. Zo wordt er een onderscheid gemaakt tussen verschillende types supernova's, op basis van de lijnen die ze vertonen in hun spectra. Geef de opmerkelijkste kenmerken die gebruikt worden om supernova's van Type Ia, Type Ib, Type Ic en Type II te onderscheiden.

De verschillende types van supernovae werden gedefinieerd op basis van het al dan niet aanwezig zijn van een aantal spectraallijnen in hun spectra. Supernovae die Balmerlijnen van waterstof vertonen, worden geklasseerd als Type II. Supernovae die deze lijnen niet vertonen, behoren tot het Type I. Binnen Type I onderscheidt met Types Ia, Ib en Ic als volgt:

- Type Ia: Duidelijke Si II lijn op 6150 ångström (1 ångström = 1 Å = 10^{-10} m = 0,1 nm)
- Type Ib: Geen duidelijke Si II lijn op 6150 ångström, wel duidelijke He I lijn op 5876 ångström.
- Type Ic: Geen of slechts zwakke Si II lijn op 6150 angstrom en geen of slechts zwakke He I lijn op 5876 ångström.

Vraag 2.
Gedetailleerde studies van supernova's toonden aan dat supernova's van Type Ia een fundamenteel verschillende oorzaak hebben dan de andere types (de zogenaamde core-collapse supernova's). Wanneer komt een supernova van Type Ia voor?

Type Ia supernovae komt voor in dubbelstersystemen waarin massaoverdracht plaatsvindt naar een witte dwerg vanaf de tweede ster. Als de massa van de witte dwerg de Chandrasekharlimiet benadert (ongeveer 1.3 zonsmassa's), wordt de druk zo groot dat de ster in elkaar stort. Hierbij kernfusie van koolstof en zuurstof op gang, die de ster doet exploderen.
Een gelijkaardig fenomeen kan ook voorkomen bij een botsing (‘merger’) van twee witte dwergen, waarbij de totale massa de Chandrasekharmassa overschrijdt.

Vraag 3.
Tijdens een supernova van type II komt ongeveer 10^{46} J energie vrij. Ongeveer 1% hiervan komt vrij als kinetische energie van uitgestoten materiaal. Minder dan een tienduizendste komt vrij in de vorm van elektromagnetische straling. Waar blijft het grootste deel van de vrijgekomen energie?

Het grootste deel van de energie komt vrij in de vorm van neutrino's.

Vraag 4.
Stel dat de kern van een massieve ster (met $M_{kern} = 3\ M_{zon}$) implodeert tot een bolvormige massa met een diameter van 100 kilometer. Bereken de energie die hierbij vrijkomt en vergelijk deze met de energie van een supernova Type II. Tip: gebruik het viriaaltheorema, dat stelt dat de energie U die vrijkomt bij de vorming van een ster met constante dichtheid gelijk is aan:

$$U = -\frac{3}{10} G \frac{M^2}{R}$$

Wanneer een massa van 3 $M_\odot$ implodeert tot een bol met een diameter van 100 km, komt een energie vrij van

$$\begin{aligned} U &= -\,{}^{3}/_{10}\ G\ M^2 / R \\ &= -\,{}^{3}/_{10} \times 6{,}673\cdot10^{-11}\ m^3\ s^{-2}\ kg^{-1} \times (6{,}0\cdot10^{30}\ kg)^2 / 50000\ m \\ &= -1{,}41\cdot10^{46}\ J \end{aligned}$$

We hebben hierbij verwaarloosd dat de ster niet implodeert vanop een oneindige straal tot een straal 50 km, wat geen probleem is aangezien de initiële straal van de ster groter is dan die van de Zon, en dus veel groter dan de uiteindelijke 50 km. Wie deze aanname niet maakt, zal vinden dan de correctie ten opzichte van het bovenstaande resultaat, bijvoorbeeld uitgaande van een initiële straal van 2 zonsstralen, ongeveer $-5\cdot10^{41}$ J bedraagt.
De gevonden energie komt vrij goed overeen met de energie die vrijkomt bij een supernova. Dit is een aanwijzing voor het feit dat supernova's van Type II waarschijnlijk het gevolg zijn van de explosie van een zware ster, wat overeenkomt met de huidige consensus.

Vraag 5.
Bij een supernova worden zware elementen gevormd, zoals ${}^{56}_{28}Ni$ dat een halfwaardetijd heeft van 6,1 dagen en ${}^{57}_{27}Co$ dat een halfwaardetijd heeft van 271 dagen. Het radioactief verval van dergelijke isotopen zorgt ervoor dat er nog lang nadat een supernova heeft plaatsgevonden elektromagnetische straling wordt waargenomen. Stel dat er 0,1 M_{zon} ${}^{56}_{28}Ni$ gevormd wordt tijdens de supernova, en 0,01 M_{zon} ${}^{57}_{27}Co$. Maak een grafiek waarop voor deze twee isotopen te zien is hoeveel deeltjes er aanwezig zijn, vanaf het moment van de supernova tot een jaar na de supernova. Voor de y-as, die het aantal deeltjes toont, gebruik je best een logaritmische schaal.

Het oplossen van deze vraag gebeurt in 2 stappen. We berekenen eerst het aantal kernen dat gevormd wordt, en daarna bekijken we hoe dit aantal afneemt na verloop van tijd.
De massa van een ${}^{56}_{28}Ni$ kern bedraagt (ongeveer) $56\cdot u = 56 \times 1{,}66\cdot10^{-27}$ kg $= 9{,}30\cdot10^{-26}$ kg.
Het aantal ${}^{56}_{28}Ni$ kernen in 0,1 $M_\odot$ is dan

$$N_{initieel} = 1{,}99\cdot10^{29}\ kg / 9{,}30\cdot10^{-26}\ kg = 2{,}14\cdot10^{54}.$$

De halfwaardetijd drukt uit hoe lang het duurt tot de helft van de aanwezige kernen vervallen is. Met een halfwaardetijd van 6,1 dagen, vinden we de volgende formule voor het aantal deeltjes in functie van de tijd (t, uitgedrukt in dagen):

$$N(t) = 2{,}14\cdot10^{54} \times e^{-\frac{t}{6{,}1}\ln 2}$$

Doen we een gelijkaardige oefening voor 0,01 $M_\odot$ ${}^{57}_{27}Co$ -kernen, dan vinden we volgend initieel aantal deeltjes:

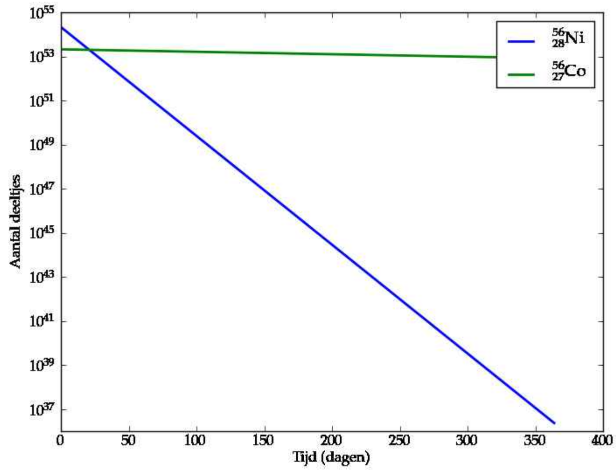
$57 \cdot u = 57 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg $= 9{,}46 \cdot 10^{-26}$ kg

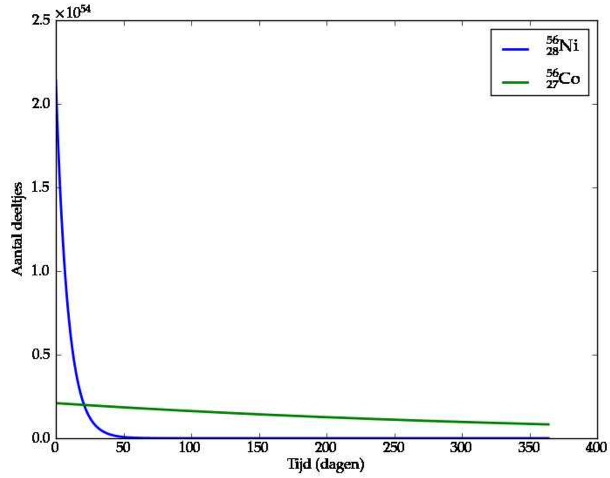
$N_{initieel} = 1{,}99 \cdot 10^{28}$ kg / $9{,}46 \cdot 10^{-26}$ kg $= 2{,}10 \cdot 10^{53}$.

Voor het aantal deeltjes in functie van de tijd, vinden we nu, met een halfwaardetijd van 271 dagen:

$$N(t) = 2{,}10 \cdot 10^{53} \times e^{-\frac{t}{271}\ln 2}$$

Op de grafiek zien we het verloop van het aantal kernen voor beide isotopen gedurende een jaar. Er is duidelijk te zien dat hoewel er initieel tien keer meer ${}^{56}_{28}Ni$ -kernen zijn, er na verloop van tijd toch meer ${}^{57}_{27}Co$ -kernen overblijven. Dit gevolg van de verschillende halfwaardetijden van verschillende isotopen is ook zichtbaar in het verloop van de lichtkracht van supernovae, waarbij men waarneemt dat de lichtkracht initieel sterk afneemt onder invloed van het verval van isotopen met korte halfwaardetijden en daarna trager en trager verandert onder invloed van isotopen met steeds langere halfwaardetijden.





Dit is het einde van de eerste ronde van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2012.