



Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2013

Oplossingen

3 april 2013

In dit document worden oplossingen voorgesteld voor de vragen van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2013. Het spreekt voor zich dat andere methodes eventueel ook tot correcte oplossingen kunnen leiden.

Vlaamse Sterrenkunde Olympiade
Vereniging Voor Sterrenkunde
Oostmeers 122c
8000 Brugge

Het organiserend comité van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2013: Steven Bloemen (KULeuven), Annelies Cloet-Osselaer (UGent), Jelle Dhaene (UGent), Ward Homan (KULeuven), Nicki Mennekens (VUB), Toine Mercier (JVS) en Frank Tamsin (VVS).

*<http://www.sterrenkundeolympiade.be>
info@sterrenkundeolympiade.be*

Meerkeuze vragenreeks

1. Op een bepaalde dag zien we de Zon precies om 18 h lokale tijd ondergaan. Als de dichtheid van de aardse atmosfeer maar half zo groot zou zijn als in werkelijkheid, welke van volgende uitspraken zou dan gelden?

a) Dan zouden we de zonsondergang zien kort ná 18 h lokale tijd.

b) Dan zouden we de zonsondergang zien kort vóór 18 h lokale tijd.

c) Dan zouden we de zonsondergang zien precies om 18 h lokale tijd.

d) Dan zou het tijdstip van de zonsondergang afhankelijk zijn van de breedteligging van onze waarnemingsplaats.

Ook nadat de Zon zich geometrisch reeds onder de horizon bevindt, kunnen we die toch nog een korte tijd boven de horizon zien. Dit is een gevolg van de atmosferische straalbreking. Deze is sterker naarmate de dichtheid van de atmosfeer groter is. Bij een lagere dichtheid van de atmosfeer zou het effect dus kleiner zijn, zouden we de Zon dus minder lang boven de horizon zien, en zouden we ze dus iets vroeger zien ondergaan.

2. Gezien vanuit Brussel (50°NB ; 4°OL) hebben sterren die zich op de hemelequator bevinden een declinatie van

a) 0°

b) 40°

c) 50°

d) 90°

Bij de zogenaamde equatoriale coördinaten wordt de declinatie per definitie gemeten vanaf de hemelequator.

3. We beschouwen volgende parameters van een object B dat bij een ander object A wil ontsnappen:

- I de massa van het object A waaraan men wil ontsnappen;
- II de massa van het object B dat wil ontsnappen;
- III de afstand tussen de massamiddelpunten van de objecten A en B;
- IV de lichtsnelheid.

In de klassieke mechanica is de ontsnappingssnelheid afhankelijk van

a) I, II, III en IV;

b) I en II;

c) I en III;

d) I, II en IV;

e) I, III en IV.

In de klassieke mechanica wordt de ontsnappingssnelheid v_e berekend als $v_e = (2 G M / r)^{1/2}$ waarbij G de universele gravitatieconstante is, M de massa van het object A waaraan men wil ontsnappen, en r de afstand tussen de massamiddelpunten van de objecten A en B.

4. Welk van volgende fenomenen doet zich voor ten gevolge van de baan van de Aarde rond de Zon en kan niet verklaard worden aan de hand van een geocentrisch model voor het zonnestelsel?

- a) de fenomenen van dag en nacht;
- b) het Corioliseffect;
- c) de aberratie van het sterlicht en de stellaire parallax;**
- d) de retrograde beweging van de planeten;
- e) zonsverduisteringen.

5. De dichte atmosfeer van Venus geeft aanleiding tot een hoge temperatuur aan het oppervlak van deze planeet. Wat is hiervan de oorzaak?

- a) De atmosfeer reflecteert het meeste zonlicht terug de ruimte in;
- b) Winden in de hoge dichte atmosfeer genereren warmte door wrijving;
- c) De atmosfeer houdt het ontsnappen van infrarode straling van Venus tegen;**
- d) Er doen zich endotherme chemische reacties voor in de atmosfeer van Venus.

6. Het inwendige van het maantje Io van Jupiter is gesmolten. De hitte die hiervoor nodig is, is afkomstig van

- a) getijdenwerking;**
- b) veelvuldige meteorietinslagen;
- c) radioactief materiaal;
- d) een grootschalig broeikaseffect.

7. Sirius heeft een schijnbare magnitude van $-1,5$, terwijl Adhara (een van de sterren van de Grote Beer) een schijnbare magnitude heeft van $+1,5$. Wat is de verhouding van hun fluxen?

- a) 2,512
- b) 3,0
- c) 7,536
- d) 15,85**
- e) 72,46

Het verband tussen de waargenomen fluxen f_1 en f_2 van twee sterren en hun respectieve schijnbare magnituden m_1 en m_2 wordt gegeven door de formule van Pogson:

$$\frac{f_1}{f_2} = \left(\sqrt[5]{100}\right)^{m_2 - m_1}$$

Het volstaat hierin $m_1 = -1,5$ en $m_2 = +1,5$ te stellen.

8. In vergelijking met de spectraallijnen in het spectrum van de Zon, zijn de lijnen in het spectrum van een superreus

- a) smaller;**
- b) breder;
- c) zwakker;
- d) sterker;
- e) zowel b als c.

9. Op welke golflengte heeft een ster met een oppervlaktetemperatuur van 3000 K een piek in haar straling?

- a) $1 \cdot 10^{-6}$ m;
- b) $17 \cdot 10^{-7}$ m;
- c) 9 nm;
- d) 100 nm;
- e) 1000 m.

De golflengte λ_{\max} waarbij een ster van temperatuur T maximaal straalt, kan berekend worden met de verschuivingswet van Wien: $\lambda_{\max} \cdot T = b$ waarbij $b = 2,897756 \cdot 10^{-3}$ K·m.

10. Welke van volgende tijden geeft het best de grootte-orde weer voor de tijd die verloopt tussen het moment dat energie in het kern van de Zon wordt gegenereerd en het ogenblik dat die aan het zonsoppervlak wordt uitgestraald?

- a) drie minuten;
- b) dertig dagen;
- c) **duizend jaar;**
- d) **een miljoen jaar;**
- e) een miljard jaar.

Dit probleem is terug te voeren tot een zogenaamde stochastische wandeling, ook wel bekend onder de naam dronkemanswandeling (random walk). De afstand tussen het beginpunt en het eindpunt van dergelijke wandeling is het product van de stapgrootte met de vierkantswortel uit het aantal genomen stappen.

Voor de Zon is duidelijk dat de afstand tussen beginpunt en eindpunt de straal van de Zon is (696000 km). We dienen nog wel de afstand te kennen die een foton aflegt tussen emissie en absorptie, en dit vraagt een beetje fysica!

Het inwendige van de Zon bestaat uit een plasma met een centrale dichtheid van meer dan 100 gram/cm³. De atomen (voornamelijk waterstof) zijn volledig geïoniseerd zodat de deeltjesdichtheid 10^{26} protonen per kubieke centimeter bedraagt. Dat betekent dat de typische afstand tussen protonen of elektronen ongeveer $(10^{-26})^{1/3} \approx 2 \cdot 10^{-9}$ centimeter bedraagt. De werkelijke 'vrije weglengte' voor straling (rekening houdend met elektromagnetische effecten) ligt eerder in de buurt van 1 centimeter. Dergelijke afstand wordt door het licht afgelegd in ongeveer $3 \cdot 10^{-11}$ seconde. We kunnen dus ruwweg stellen dat een foton (696000 kilometer / 1 centimeter)² = $5 \cdot 10^{21}$ stappen zal moeten afleggen om de rand van de Zon te bereiken. Dit zal $5 \cdot 10^{21} \times 3 \cdot 10^{-11} = 1,5 \cdot 10^{11}$ seconden in beslag nemen, hetzij ongeveer 4000 jaar.

Sommige bronnen verwijzen naar 'honderdduizenden jaren' of zelfs 'enkele miljoenen jaren', afhankelijk van wat wordt aangenomen voor de gemiddelde vrije weglengte. De dichtheid in het inwendige van de Zon is ook niet constant, waardoor de stappen aan de rand veel groter zijn dan in het centrum van de Zon (waar de dichtheid het hoogst is).

Merk op dat een ongeveer 3 keer kleinere schatting voor de vrije weglengte, de tijdschaal meteen met een factor 10 vergroot! Typische onzekerheden op basis van 'orde van grootte' schatting kunnen leiden tot een factor 100 verschil in de geschatte tijden. Daardoor kunnen de schattingen voor de tijd die verloopt tussen het moment dat energie in het kern van de Zon wordt gegenereerd en het ogenblik dat die aan het zonsoppervlak wordt uitgestraald, oplopen tot 1 miljoen jaar.

11. Lichte sterren worden aan het einde van hun leven een witte dwerg. Ze bevinden zich dan linksonder in het Hertzsprung-Russell-diagram. Naarmate deze objecten afkoelen, hoe zullen ze dan verder bewegen in het Hertzsprung-Russell-diagram?

- a) Ze blijven verder op dezelfde locatie;
- b) Ze zullen naar rechts bewegen;
- c) Ze zullen naar rechts en naar boven bewegen;
- d) Ze zullen naar links en naar boven bewegen;
- e) Ze zullen naar rechts en naar beneden bewegen.**

12. Welk van volgende veranderlijke sterren zou als een Cepheïde gerangschikt worden?

- a) een superreus van spectraaltipe B met een periode van 0,14 dagen;
- b) een reus van spectraaltipe F met een periode van 14 jaar;
- c) een reus van spectraaltipe G met een periode van 14 uur;
- d) een reus van spectraaltipe K met een periode van 14 dagen;**
- e) een superreus van spectraaltipe M met een periode van 140 dagen.

13. Object A heeft een temperatuur van 200 kelvin en object B heeft een temperatuur van 600 K. Wat kan gezegd worden over de straling die deze objecten uitzenden, aannemende dat beide objecten dezelfde oppervlakte hebben?

- a) Object B zendt 3 keer meer straling uit dan object A.
- b) Object B zendt 9 keer meer straling uit dan object A.
- c) Object B zendt 27 keer meer straling uit dan object A.
- d) Object B zendt 81 keer meer straling uit dan object A.**
- e) Object B zendt evenveel straling uit dan object A.

De wet Stefan-Boltzmann geeft het verband tussen de lichtkracht L van een zwarte straler, en de straal R en de temperatuur T ervan, volgens $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ waarbij $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ de constante van Stefan-Boltzmann (of eerste stralingsconstante) is. Gezien beide objecten dezelfde oppervlakte ($4\pi R^2$) hebben, is de verhouding van hun lichtkrachten enkel afhankelijk van de vierde macht van de verhouding van hun temperaturen.

14. Een astronoom ontdekt een dubbelster waarvan de ene component een hoofdreeksster is met 15 keer de massa van de Zon, en de andere component een reuzenster is met 10 keer de massa van de Zon. Waarom is dit op het eerste gezicht nogal verbazend?

- a) De twee sterren in een dubbelstersysteem zouden zich in dezelfde evolutiefase moeten bevinden en dus ofwel beide hoofdreekssterren zijn, ofwel beide reuzen;
- b) De twee sterren zouden dezelfde leeftijd moeten hebben, en dus zou de ster met de meeste massa als eerste een reus geworden moeten zijn;**
- c) Reuzensterren komen normaal niet voor in een dubbelstersysteem;
- d) Een ster met een massa van 15 zonsmassa's is te groot om een hoofdreeksster te zijn;
- e) De kans dat twee dergelijke massieve sterren in één dubbelstersysteem zouden voorkomen, is zo klein, dat het erg onwaarschijnlijk is dat ooit dergelijk systeem zou ontdekt worden.

15. Waarom kunnen sterren in ons Melkwegstelsel gemakkelijker waargenomen worden in het infrarood dan in optisch licht?

- a) **Stof absorbeert minder efficiënt infrarode straling dan optisch licht;**
- b) Sterren zijn lichtkrachtiger in het infrarood dan in het optisch deel van het spectrum;
- c) Er zijn meer infrarode sterren in het Melkwegstelsel dan alleen maar de zichtbare sterren;
- d) Donkere materie zendt geen straling uit in het infrarood.

16. Hoe weten we dat quasars niet groter zijn dan het zonnestelsel?

- a) Ze zijn te helder om erg groot te zijn;
- b) Ze blijven puntvormig wanneer we ze door een krachtige telescoop waarnemen;
- c) Ze bevatten een zwart gat en moeten dus relatief klein zijn.
- d) **Ze variëren in helderheid op tijdschalen van dagen tot weken.**

17. Botsingen tussen sterrenstelsels

- a) zijn veel zeldzamer dan botsingen tussen sterren;
- b) kunnen elliptische stelsels omvormen tot spiraalstelsels;
- c) kunnen ervoor zorgen dat grote aantallen sterren botsen en exploderen;
- d) **zorgen ervoor dat de gas- en stofwolken botsen, wat leidt tot snelle stervorming;**
- e) zijn de beste verklaring voor de zogenaamde gamma-ray bursts.

18. Welke van volgende uitspraken over zwarte gaten is niet correct?

- a) Als we kijken naar een klok die naar een zwart gat toe valt, dan zien we die trager tikken naarmate die het zwart gat nadert;
- b) Als je kijkt naar iemand anders die in het zwart gat valt, dan zal je die nooit de waarnemingshorizon zien overschrijden; daarentegen zal die persoon uit het zicht verdwijnen doordat het licht dat hij of zij uitstraalt of reflecteert meer en meer roodverschoven zal zijn.
- c) Als je in een zwart gat zou vallen, dan zou je zelf je eigen tijd volledig normaal zien verlopen bij het overschrijden van de waarnemingshorizon;
- d) **Als de Zon op een of andere mysterieuze wijze plots zou verdwijnen en vervangen zou worden door een zwart gat van dezelfde massa, dan zou de Aarde al snel door dat zwart gat opgezogen worden;**
- e) Een zwart gat is echt een gat in de ruimtetijd, waarlangs we het waarneembare heelal zouden kunnen verlaten.

19. Welke parameter van het huidige heelal wordt – meer dan welke andere parameter dan ook – beschouwd als de bepalende factor voor het ultieme lot van het heelal?

- a) de hoeveelheid massa die zich ophoudt in de zwarte gaten in het heelal;
- b) het aantal fotonen in het heelal;
- c) het aantal neutrino's in het heelal;
- d) **de hoeveelheid materie en energie in het heelal.**

20. Een astronoom bestudeert een verafgelegen sterrenstelsel en meet een verwijderingssnelheid van 12000 km/s. Wat is de afstand van deze galaxie?

- a) 0,171 Mpc;
- b) 1,71 Mpc;
- c) 17,1 Mpc;
- d) 171 Mpc;**
- e) 1710 Mpc.

Het verband tussen de verwijderingssnelheid v en de afstand d van een verafgelegen sterrenstelsel kan berekend worden aan de hand van de wet van Hubble: $v = H_0 \cdot d$, waarbij thans voor H_0 ongeveer de waarde $70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ aangenomen wordt.

21. We beschouwen de volgende tijdsschalen:

- 1 = dynamische tijdsschaal
- 2 = Kelvin-Helmholtz tijdsschaal
- 3 = nucleaire tijdsschaal

Welke rangschikking toont de tijdsschalen die de evolutie van de ster van 3 zonsmassa's bepalen in volgorde van kort naar lang.

- a) 1, 3, 2;
- b) 3, 1, 2;
- c) 2, 1, 3;

d) geen van de vorige oplossingen is juist.

De dynamische tijdschaal t_{dyn} geeft aan op welke tijd een ster zou expanderen of samentrekken wanneer het evenwicht tussen de drukgradiënt en de gravitatie plots zou verbroken worden (men spreekt ook van de 'vrije val' tijdschaal). Er geldt dat $t_{\text{dyn}} = r / v_e$ waarbij r de straal van het object is, G de universele gravitatieconstante is en $v_e = (2Gm / r)^{1/2}$ de ontsnappingsnelheid voorstelt, zodat $t_{\text{dyn}} = (r^3 / 2GM)^{1/2}$.

De Kelvin-Helmholtz tijdschaal geeft aan hoe lang het object kan stralen als de kernfusie plots zou stilvallen. Er geldt dat $t_{\text{KH}} = U / L$ waarbij de thermische energie U ruwweg overeenstemt met de potentiële energie en L de lichtkracht van de ster is, zodat dat $t_{\text{KH}} = GM^2 / rL$.

Met de nucleaire tijdschaal berekent men hoe lang het zou duren vooraleer de ster al haar nucleaire brandstof heeft opgebruikt, als het verbruik van de nucleaire brandstof aan het huidige tempo zou doorgaan. Er geldt dat $t_{\text{nuc}} = qXM / L$ waarbij X de oorspronkelijk aanwezige massafractie waterstof is ($X \approx 0,7$), q de fractie hiervan is die beschikbaar is voor kernverbranding ($q \approx 0,1$), en M en L respectievelijk de massa en de lichtkracht voorstellen.

(als de kernfusie even snel doorgaat) geen brandstof meer heeft voor de kernfusie
 Voor zowat alle sterren geldt dat $t_{\text{dyn}} \ll t_{\text{KH}} \ll t_{\text{nuc}}$, zodat de correcte volgorde voor een ster van 3 zonsmassa's 1, 2, 3 is (wat eenvoudig te verifiëren is door het invullen van de gepaste waarden).

22. Een onderzoeker is op zoek naar een planeet waarop leven mogelijk is. Een noodzakelijke voorwaarde hiervoor is dat de planeet rotsachtig is, zodat ze een vast oppervlak heeft. Via fotometrische waarnemingen wordt een planeet gevonden via de transitmethode. De planeet blijkt een straal van 12000 km te hebben. De massa van de ster waar de planeet bij hoort, is 2 zonsmassa's. Welke van volgende massa's kan de massa van de planeet zijn?

- a) $0.04120 M_{\text{Jupiter}}$
- b) $0.00310 M_{\text{Jupiter}}$
- c) $0.00151 M_{\text{Jupiter}}$
- d) $0.00022 M_{\text{Jupiter}}$

Deze massa benadert de dichtheid van de Aarde, alle andere zijn te laag voor een planeet met rotsachtige compositie.

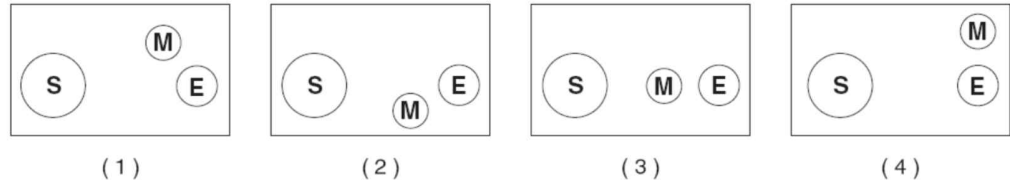
23. De Kepler satelliet maakt een lichtkromme van een eclipserende dubbelster waarrond een planeet cirkelt die wordt waargenomen in de lichtcurve met de transitmethode. Zowel de dubbelster als de planeet hebben cirkelvormige banen. Beide sterren hebben dezelfde temperatuur, massa en straal als de Zon. Welke uitspraak klopt niet?

- a) **Alle transits van de planeet over ster A en over ster B duren even lang.**
- b) De transits van de planeet over één van beide sterren zijn in de lichtcurve waar te nemen als dipjes die minder diep zijn dan de eclipsen van de twee sterren.
- c) Het is mogelijk dat de planeet een transit maakt vóór de sterren A en B, terwijl deze sterren zelf in eclips zijn.
- d) De tijd tussen opeenvolgende transits van de planeet over ster A is niet constant.

Doordat de twee sterren bewegen, hangt de duurtijd van een transit af van op welke plaats de sterren in hun baan zitten op het moment van de transit. Als de ster die getransit wordt op dat ogenblik mee beweegt met de richting van de planeet, duurt de transit langer.

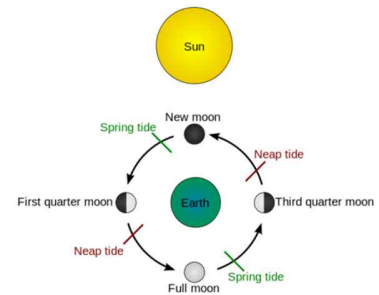
24. Welke volgorde van de zon (aangeduid met S op de figuren hieronder), de maan (M) en de aarde (E) zorgt voor het hoogste hoogtij? Op de figuur beweegt de aarde rond de zon in tegenwijzerzin.

- a) (1)
b) (2)
c) (3)
d) (4)



Als de zon en de maan als het ware in elkaars verlengde staan ten opzichte van de aarde, dan bundelen zij hun krachten en trekken meer water aan. Dit noemen we springtij. Springtij komt twee maal per maansmaand (van 29,53 dagen) voor. Je zou verwachten dat het springtij is bij volle maan en bij nieuwe maan. Het blijkt echter twee dagen later te vallen.

De watermassa is niet homogeen verdeeld over de aarde. De zeeën en oceanen zijn niet overal even diep en de kusten zijn grillig gevormd. Op de meeste breedtegraden is de baansnelheid van het aardoppervlak veel groter dan de maximale golfsnelheid, waardoor de getijgolf met de aarde meedraait en daardoor voorligt op de Zon en de Maan.



25. Welke methoden kunnen gebruikt worden om de afstand tot dichtbijgelegen galaxieën te meten?

- a) witte dwerg supernova's;
b) parallaxmetingen;
c) **Cepheïden en witte dwerg supernova's**;
d) parallaxmetingen en Cepheïden.

26. Hoe ver staat een galaxie van ons als de geobserveerde golflengte van een spectraallijn 110 % van de rustgolflengte bedraagt?

- a) 4,3 Mpc;
b) 43 Mpc;
c) **430 Mpc**;
d) 4300 Mpc;
e) Dit kan niet bepaald worden uit de gegevens.

De formule voor het dopplereffect geeft het verband tussen de verschuiving $\Delta\lambda$ van een spectraallijnen ten opzichte van de normale golflengte λ , en de verwijderingssnelheid v van het object: $\Delta\lambda / \lambda = v / c$, waarbij c de lichtsnelheid voorstelt. Gezien $\Delta\lambda / \lambda = 0,1$ mogen we hier deze niet-relativistische formule toepassen, maar uiteraard zou de relativistische formule eveneens goede resultaten leveren. Eenmaal de verwijderingssnelheid v gekend, volgt de afstand d van een verafgelegen sterrenstelsel uit de wet van Hubble: $v = H_0 \cdot d$, waarbij thans voor H_0 ongeveer de waarde $70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ aangenomen wordt.

27. Welke elementen zijn er allemaal gevormd tijdens de big bang nucleosynthese?

- a) **H, He, Li, Be;**
- b) alle gekende elementen;
- c) ijzer (Fe) en alle elementen die lichter zijn;
- d) He, Li, Be.

28. Hieronder staan vier uitspraken:

- (I) Geïoniseerde nevels komen meer voor in spiraalgalaxieën dan in elliptische galaxieën.
- (II) Donkere materie zorgt ervoor dat ons universum versnellend expandeert.
- (III) Als galaxie A twee keer zo snel van ons wegbeweegt als galaxie B, dan staat ze twee keer zo ver van ons weg.
- (IV) Als je standaardkaarsen gebruikt die achteraf minder helder blijken te zijn dan je dacht, dan zijn je bepaalde afstanden te klein.

Welke uitspraken zijn niet waar?

- a) (I) en (IV);
- b) (II), (III) en (IV);
- c) (I) en (III);
- d) **(II) en (IV).**

29. Plaats de gebeurtenissen in de vorming van ons zonnestelsel in de juiste volgorde:

- a) ineenstortende gaswolk, accretie condensatie, zwaar bombardement;
- b) zwaar bombardement, ineenstortende gaswolk, accretie, condensatie;
- c) **ineenstortende gaswolk, condensatie, accretie, zwaar bombardement;**
- d) Ineenstortende gaswolk, accretie, zwaar bombardement, condensatie.

30. Hoe worden spiraalarmen het best beschreven?

- a) **Het zijn dichtheidsgolven die door de galaxie lopen. Er bevinden zich dus steeds andere sterren in de armen.**
- b) De spiraal is een statische structuur die op zijn geheel meerooteert met de sterren van de galaxie.
- c) Sterren ver weg van het galaxiecentrum zullen trager bewegen dan sterren dichtbij het centrum, het spiraalpatroon zal zich dus opwinden.
- d) Het zijn willekeurige bewegingen van sterren die zorgen voor het spiraalpatroon.

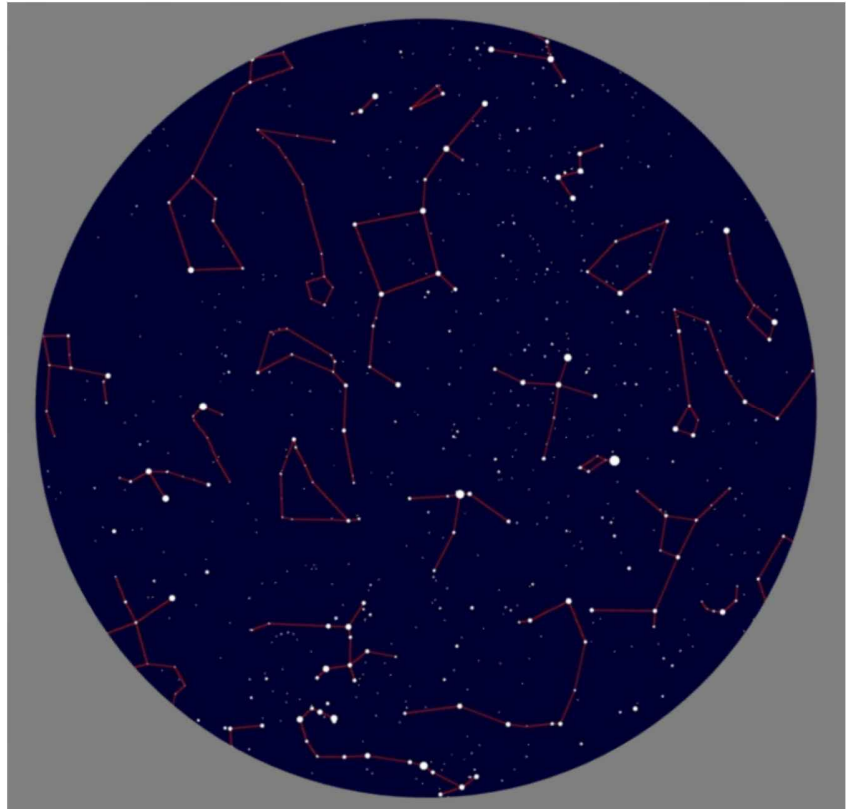
1.	B
2.	A
3.	C
4.	C
5.	C
6.	A
7.	D
8.	A
9.	A
10.	C-D

11.	E
12.	D
13.	D
14.	B
15.	A
16.	D
17.	D
18.	D
19.	D
20.	D

21.	D
22.	A
23.	A
24.	B
25.	C
26.	C
27.	A
28.	D
29.	C
30.	A

Open vragenreeks I: sterrenhemel

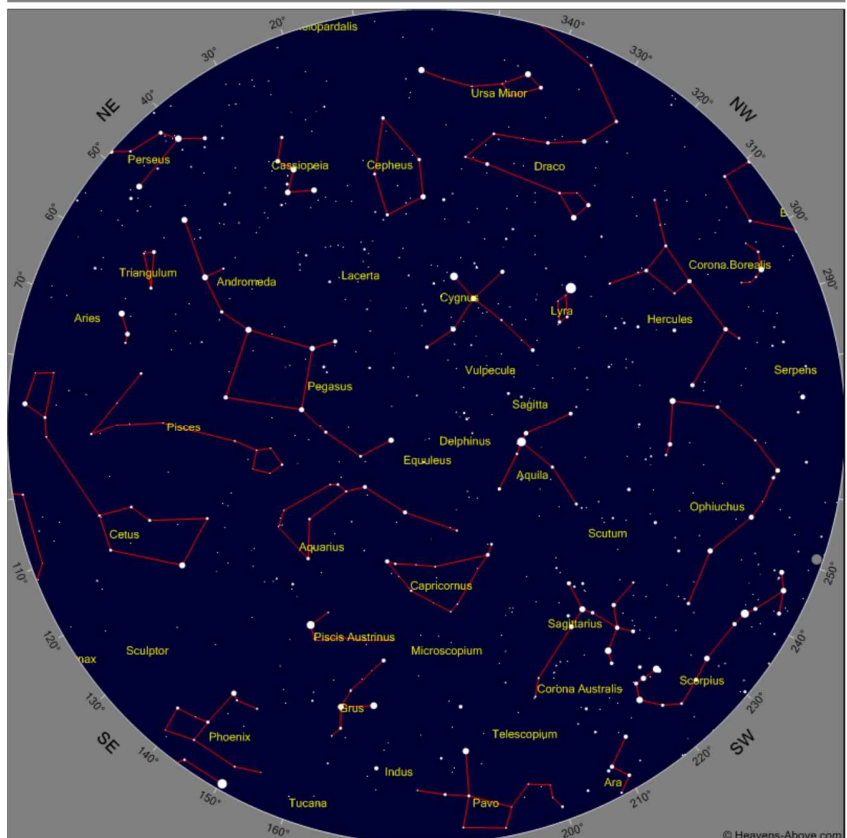
De figuur rechts toont de sterrenhemel voor een bepaald tijdstip en voor een bepaalde plaats op Aarde. De sterren aan de rand zijn die die te zien zijn aan de horizon; de sterren in het midden van de kaart bevinden zich boven de waarnemer. De zichtbaarheid van de Maan en de planeten is niet aangegeven.



Vraag 1.

Geef de posities aan van de vier windstreken (noord, oost, zuid, west).

Op de figuur rechts is de sterrenkaart van hierboven zodanig gedraaid dat het noorden bovenaan geplaatst is; het zuiden bevindt zich dan uiteraard onderaan op de figuur. Dergelijke sterrenkaart is zo ontworpen dat de kaart boven het hoofd van de waarnemer moet gehouden worden. Als die naar het noorden kijkt, bevindt het oosten zich rechts van hem, dus links op de figuur hiernaast. Het westen bevindt zich dan uiteraard rechts op de figuur.



Vraag 2.

a) Aan welke eigenschappen voldoet de gebruikte projectiemethode voor het maken van deze sterrenkaart:

- hoekgetrouw;
- oppervlaktegetrouw;
- afstandsgetrouw;
- behoud van kortste weg.

b) Welke geometrische constructie ligt ten grondslag aan deze projectie?

Een stereografische azimutale projectie is een projectie van een boloppervlak op een plat vlak waarbij de projectielijnen worden getrokken vanuit een punt op de bol diametraal tegenover het projectievlak.

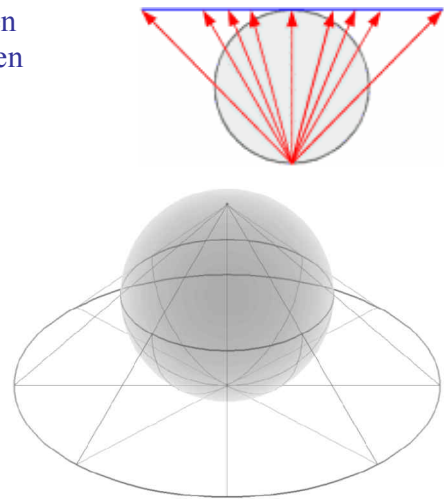
De projectie die op deze wijze tot stand komt, heeft hoekgetrouwheid als gunstige eigenschap. Dit betekent dat de hoeken waaronder krommen op het boloppervlak elkaar snijden, behouden blijven bij projectie. Men spreekt in dit geval van conforme projectie.

De projectie is echter niet oppervlaktegetrouw: de schaal neemt progressief toe met de afstand van het centrum. Merk trouwens op dat het onmogelijk is om een projectie te ontwerpen die zowel hoekgetrouw als oppervlaktegetrouw is; dit is een gevolg van het theorema egregium van Gauss.

Gezien de projectie niet oppervlaktegetrouw is, kan ze a fortiori niet afstandsgetrouw zijn.

De projectie bewaart evenmin de kortste weg. Immers, een grote cirkel op de bol wordt niet noodzakelijk afgebeeld op een rechte; dit is enkel het geval voor grote cirkels die door het projectiepunt gaan.

Merk op dat bij deze stereografische azimutale projectie maar de helft van het boloppervlak is weergegeven. Voor draaibare sterrenkaarten (die niet voor een specifiek tijdstip gemaakt zijn) gebruikt men vaak equidistante azimutale projectie, waarbij men meer dan een halve bol op eenzelfde geprojecteerde kaart kan afbeelden.



Vraag 3.

a) Vanaf welke van volgende plaatsen kan de sterrenhemel in de loop van het jaar 2013 op een of meerdere tijdstippen (bij benadering) ongeveer gezien worden zoals de sterrenkaart aangeeft, en vanaf welke plaatsen niet (en leg uit waarom):

- Brussel (België)
- Spitsbergen (Noorwegen)
- Bangalore (India)
- Kaapstad (Zuid-Afrika)
- Madrid (Spanje)
- Lima (Peru)

Aangezien de Poolster op de sterrenkaart te zien is, kunnen we al meteen alle plaatsen op het zuidelijk halfrond elimineren. De hoogte van de Poolster komt overeen met de plaatselijke breedteligging. De Poolster staat hier vrij laag aan de hemel, wat betekent dat alleen Bangalore (13° noorderbreedte) als mogelijkheid overblijft.

b) Kies één van de hierboven aangegeven plaatsen waarvoor de sterrenhemel in de loop 2013 kan waargenomen worden zoals op de kaart aangegeven. Veronderstel dat de kaart de sterrenhemel weergeeft rond middernacht lokale tijd. Rond welke periode van het jaar (maand) is dit het geval?

Alleen Bangalore komt dus in aanmerking.

Op de sterrenkaart zijn volgende sterrenbeelden te zien die langs de ecliptica gelegen zijn: Scorpius (Schorpioen), Ophiuchus (Slangendrager), Sagittarius (Boogschutter), Capricornus (Steenbok), Aquarius (Waterman), Pisces (Vissen), Aries (Ram). Gezien het middernacht is, moet de Zon ongeveer op haar laagste punt staan, en bevindt ze zich dus ergens in de omgeving van Cancer (Kreeft) of Leo (Leeuw). Ruwweg kan geredeneerd worden dat dit ongeveer vijf sterrenbeelden in de Dierenriem verder is dan de Vissen, waar de Zon zich bevindt bij het begin van de lente (het lentepunt), en dat we dus ook ongeveer vijf maand verder zijn. Een planetariumprogramma kan uiteraard ook uitstekende diensten bewijzen om te vinden dat deze sterrenkaart kan gereproduceerd worden voor middernacht omstreeks 15 augustus.

c) Kies één van de hierboven aangegeven plaatsen waarvoor de sterrenhemel in de loop 2013 kan waargenomen worden zoals op de kaart aangegeven. Veronderstel dat de kaart de sterrenhemel weergeeft rond midden mei. Rond welk tijdstip van de dag (uur) is dit het geval?

Ook nu komt uiteraard enkel Bangalore in aanmerking.

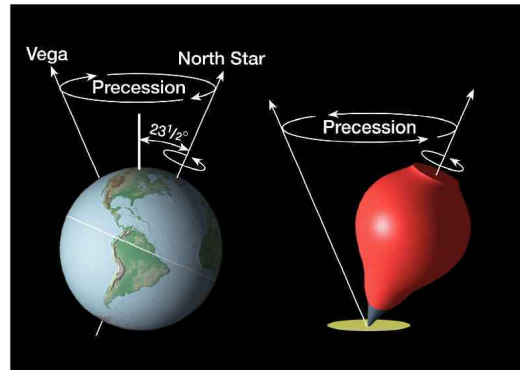
Uit het vorige luik weten we dat rond midden augustus deze sterrenhemel rond middernacht te zien is. Het verschil van drie maanden in de tijd (een vierde van een jaar), komt overeen met een verschuiving van 6 uur in de positie van de sterrenbeelden. De sterrenkaart geeft rond midden mei dus de sterrenhemel weer omstreeks 6 uur lokale tijd ('s morgens).

Vraag 4.

De sterrenkaart zoals hierboven getoond kan in het verleden of in de toekomst de sterrenhemel weergeven voor andere plaatsen (uit bovenstaande lijst) dan thans het geval is. Leg uit.

Dit is een gevolg van de precessiebeweging van de aardas.

Precessie is de beweging die de draaias van een roterend voorwerp maakt onder invloed van een uitwendige kracht. Zonder zo'n uitwendige kracht wijst de as steeds in dezelfde richting. Het eenvoudigste voorbeeld van precessie kan men zien aan een draaiende tol. Als de tol niet precies rechtop staat, zal de zwaartekracht proberen om de rotatieas 'om te laten vallen'. Dat gebeurt echter niet: in plaats daarvan draait de rotatieas rond om de verticaal. De aarde is te vergelijken met een tol die niet precies rechtop staat.



De aardequator maakt tegenwoordig een hoek van ongeveer 23,5 graden met de ecliptica.

Gedurende de geologische geschiedenis schommelt die inclinatie tussen 21,5 en 24,5 graden. De zon oefent daardoor een kracht uit op het massaoverschot dat zich door de afplating der aarde rondom de evenaar bevindt. Deze kracht zal proberen de aardas loodrecht op de ecliptica te stellen. Omdat de aarde om haar as draait, is het resultaat dat de aardas zelf een kegel rondom de pool van de ecliptica beschrijft. Dit uit zich in een verplaatsing van de noordpool aan de hemel, zij beschrijft een cirkel van 23,5 graden rondom de pool van de ecliptica. De periode van de precessie is 26000 jaar.

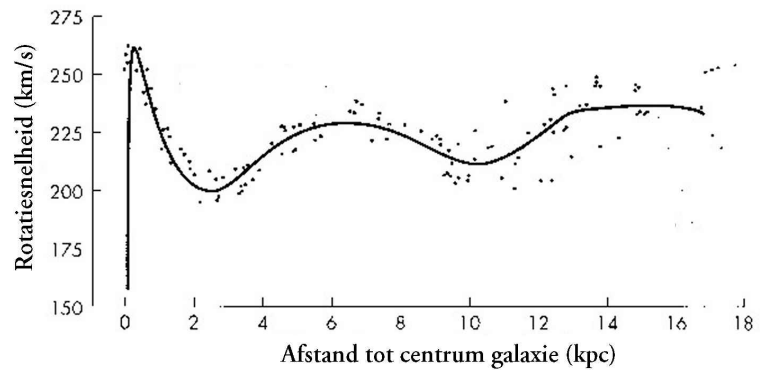
Op het ogenblik is de noordelijke hemelpool minder dan één graad van de ster Polaris (α Ursae Minoris) verwijderd; deze ster noemen we daarom (noord)poolster. Ongeveer 14000 jaar geleden was Vega (α Lyrae) de poolster, en omstreeks 2800 voor onze tijdrekening was Thuban (α Draconis) poolster; toekomstige poolsterren zijn γ Cephei (4145) en Adleramin (α Cephei, 7530), over 25770 jaar zal de hemelpool weer ongeveer met Polaris samenvallen.

De toekomstige zuidelijke poolsterren zullen zijn: ω Carinae (in 5770), υ Carinae (6850), Turais (ι Carinae, 8075) en δ Velorum (9240).

Open vragenreeks II: snelheidsprofielen

Vraag 1.

De grafiek rechts toont een zogenaamde “rotatiecurve” van ons Melkwegstelsel, waarbij de rotatiesnelheid van de objecten is uitgezet als functie van hun afstand tot het centrum van ons Melkwegstelsel. De punten stellen de gemeten waarden voor, terwijl de kromme een soort gemiddelde voorstelt.



Bereken op basis van deze rotatiecurve de totale massa die zich binnen een straal van 6 kiloparsec (= 6 kpc = 6000 pc) van het centrum van ons Melkwegstelsel bevindt.

Wanneer we een testmassa m beschouwen die zich op een afstand r van het centrum van de galaxie bevindt, dan ondervindt die de gravitatiekracht van alle massa $M(r)$ die zich binnen een straal r van het centrum van het sterrenstelsel ophoudt.

Anderzijds leert de dynamica van de cirkelvormige beweging dat de centripetale versnelling van dergelijke testmassa $(v(r))^2 / r$ is, waarbij $v(r)$ de rotatiesnelheid van de testmassa is.

Als we deze twee zaken combineren, komen we tot

$$G \frac{mM(r)}{r^2} = m \frac{(v(r))^2}{r}$$

waaruit volgt dat

$$M(r) = \frac{(v(r))^2 r}{G}$$

met $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ de universele gravitatieconstante.

Op de grafiek lezen we voor een afstand $r = 6 \text{ kpc}$ (waarbij $1 \text{ kpc} = 1000 \text{ parsec}$ en $1 \text{ parsec} = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ m}$) een rotatiesnelheid $v(r) = 225 \text{ km/s}$ af.

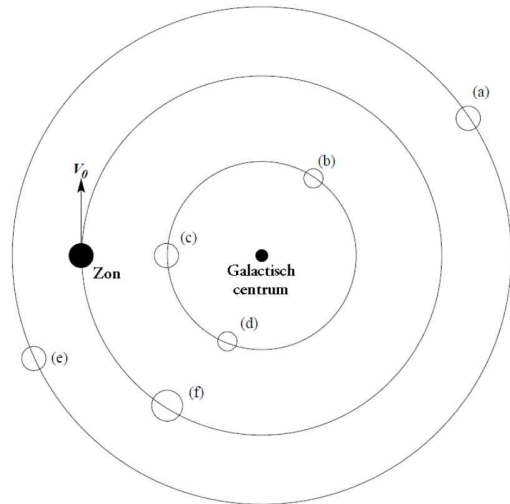
Na invullen in bovenstaande formule vinden we als massa $1,4 \cdot 10^{41} \text{ kg}$.

Vraag 2.

De figuur hiernaast toont schematisch de beweging van de Zon en van enkele gaswolken rond het centrum van ons Melkwegstelsel. De positie van de Zon is aangeduid, samen met een snelheidsvector. We veronderstellen nu dat ons Melkwegstelsel een vlakke rotatiecurve zou vertonen, waarbij elk object met dezelfde snelheid roteert ($v = v_0$) als de Zon. Geef voor elk van de gaswolken (a – b – c – d – e – f) aan wat wij in het spectrum zullen waarnemen:

- geen verschuiving van de spectraallijnen;
- roodverschuiving;
- blauwverschuiving.

Leg elk antwoord uit!



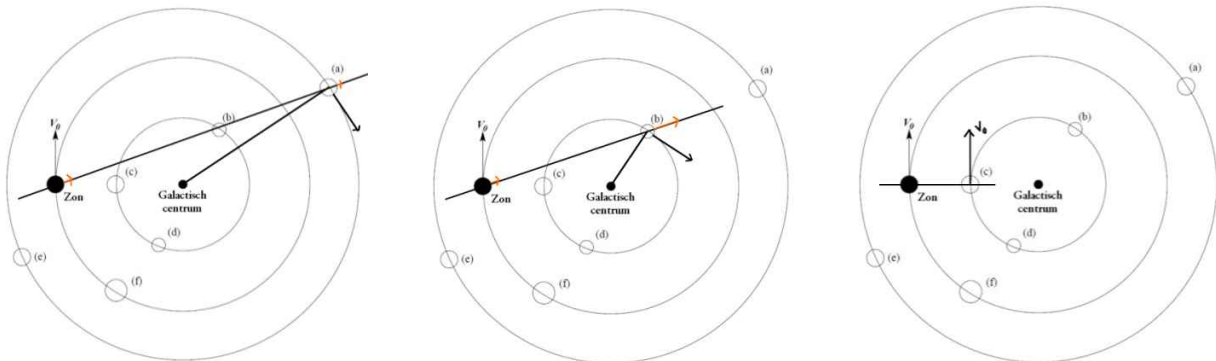
Een verschuiving in spectraallijnen valt te verklaren door het dopplereffect. Indien een object zich van ons verwijdert, vertoont het spectrum roodverschuiving. Blauwverschuiving is te zien wanneer een object naar ons toe beweegt. Met deze dopplerverschuiving is echter enkel de radiële component van de snelheid te bepalen (i.e. de component van de snelheid volgens de verbindinglijn tussen beide objecten). We kunnen dus aan de hand van deze radiële snelheden de resulterende snelheid volgens de verbindinglijn bepalen en zo achterhalen wat de netto beweging gaat zijn: naar elkaar toe, van elkaar weg of geen beweging ten opzichte van elkaar. Dit gebeurt door de snelheidsvectoren van de Zon en van de gaswolk te projecteren op de verbindinglijn Zon-gaswolk en deze componenten vectorieel van elkaar af te trekken. De resultante laat dan zien of de beweging zal resulteren in een verschuiving van de spectraallijnen. In onderstaande tekeningen stellen de zwarte pijlen telkens de snelheidsvectoren voor en de oranje pijlen de radiële componenten ervan.

We noemen telkens $v_{r,zx}$ de component van de snelheid van de Zon en $v_{r,wx}$ de component van de snelheid van de gaswolk langs de verbindinglijn Zon-gaswolk in positie x.

De gaswolk in positie a beweegt zich van de Zon weg en de Zon beweegt zich naar de gaswolk in positie a toe. Evenwel is $|v_{r,za}| > |v_{r,wa}|$ waardoor er netto sprake is van een nadering tussen de Zon en de gaswolk in positie a. Derhalve zullen we blauwverschuiving kunnen waarnemen in het spectrum van de gaswolk in positie a.

De gaswolk in positie b beweegt zich van de Zon weg en de Zon beweegt zich naar de gaswolk in positie b toe. Evenwel is $|v_{r,zb}| < |v_{r,wb}|$ waardoor er netto sprake is van een verwijdering tussen de Zon en de gaswolk in positie b. Derhalve zullen we roodverschuiving kunnen waarnemen in het spectrum van de gaswolk in positie b.

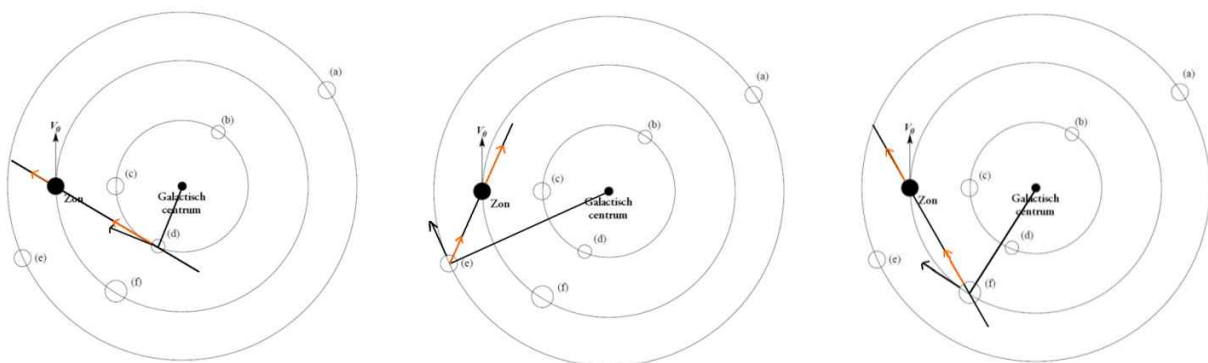
Voor de gaswolk in positie c is $|v_{r,zc}| = |v_{r,wc}| = 0$, zodat er geen radiële beweging is tussen de Zon en de gaswolk in positie c. Derhalve zullen we hier geen verschuiving in de spectraallijnen van de gaswolk in positie c kunnen waarnemen.



De gaswolk in positie d beweegt zich naar de Zon toe en de Zon beweegt zich van de gaswolk in positie d weg. Evenwel is $|v_{r,zd}| < |v_{r,wd}|$ waardoor er netto sprake is van een nadering tussen de Zon en de gaswolk in positie d. Derhalve zullen we blauwverschuiving kunnen waarnemen in het spectrum van de gaswolk in positie d.

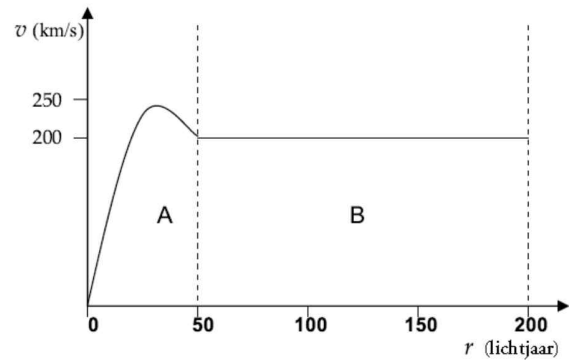
De gaswolk in positie e beweegt zich naar de Zon toe en de Zon beweegt zich van de gaswolk in positie e weg. Evenwel is $|v_{r,ze}| > |v_{r,we}|$ waardoor er netto sprake is van een verwijdering tussen de Zon en de gaswolk in positie e. Derhalve zullen we roodverschuiving kunnen waarnemen in het spectrum van de gaswolk in positie e.

De gaswolk in positie f beweegt zich naar de Zon toe en de Zon beweegt zich van de gaswolk in positie f weg. Evenwel is $|v_{r,zf}| = |v_{r,wf}|$, zodat er geen radiële beweging is tussen de Zon en de gaswolk in positie f (wat ook logisch is gezien ze zich op dezelfde baan bevinden). Derhalve zullen we hier geen verschuiving in de spectraallijnen van de gaswolk in positie f kunnen waarnemen.



Vraag 3.

De grafiek rechts toont het snelheidsprofiel $v(r)$ van een hypothetische bolvormige sterrenhoop. Het deel van de grafiek in gebied B kan bij benadering als constant beschouwd worden. We nemen aan dat de bolhoop gravitationeel gebonden is. Zij nu het massaprofiel $M(r)$ de totale massa van de bolhoop gelegen binnen een straal r van het centrum. Gevraagd is de grafiek te schetsen van $M(r)$ – en dit uiteraard zowel voor gebied A als gebied B.

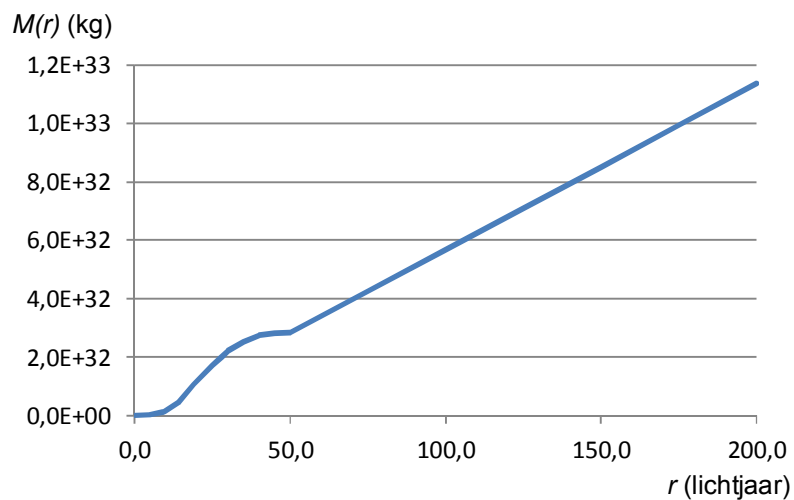


Dit is een toepassing op de formule

$$M(r) = \frac{(v(r))^2 r}{G}$$

die in vraag 1 werd opgesteld.

Dit leidt tot een grafiek die er ongeveer zal uitzien zoals hieronder weergegeven.



Open vragenreeks III: pulsars

In 1967 ontdekte Jocelyn Bell een bron die pulsen uitstuurde met een periode van 1,337 seconde. Het object is nu gekend als een pulsar en er zijn sindsdien al meer dan 1000 gelijkaardige bronnen gevonden.

Men wist niet wat de zeer stabiele pulsen kon voortbrengen en besloot verschillende mogelijke scenario's na te trekken.

Vraag 1.

a) Een eerste scenario was dat het signaal de orbitale periode van de een dubbelster voorstelde. Reken uit hoe dicht bij elkaar twee puntmassa's met een massa van 1 zonsmassa zouden moeten staan om een baanperiode van 1,337 seconde te hebben.

Dit kan berekend worden aan de hand van de derde wet van Kepler:

$$T^2 / a^3 = 4 \pi^2 / (G (M_1 + M_2))$$

waarbij $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ en $M_1 = M_2 = 1 M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ en $T = 1,337 \text{ s}$.
Hieruit volgt $a = 2,3 \cdot 10^6 \text{ m}$.

b) Vergelijk deze afstand met de typische stralen van een hoofdreeksster zoals de zon, een typische witte dwerg ($M = 0,6 M_{\odot}$; $R = 0,01 R_{\odot}$) en een typische neutronenster ($M = 1,4 M_{\odot}$; $R = 25 \text{ km}$). Welke sterren zouden er in de baan uit vraag a kunnen passen?

De straal van de zon is $6,955 \cdot 10^8 \text{ m}$ en die van een typische witte dwerg $7 \cdot 10^6 \text{ m}$. Beide sterren zijn te groot om in de baan te passen die we in vraag a uitrekenden. Twee neutronensterren met een straal van 25 km passen er wel in. Het is dus op basis van de grootte van de sterren niet uit te sluiten dat het waargenomen signaal een gevolg is van een paar neutronensterren in een dubbelster met een baanperiode van 1,337 s.

Opmerking (niet vereist in het antwoord): De algemene relativiteitstheorie voorspelt dat de baan van een dubbele neutronenster door het uitzenden van de gravitatiestraling kleiner wordt, en dat de orbitale periode van de dubbelster bijgevolg afneemt. Men neemt echter een toename van de periode in het signaal van pulsars waar, wat bewijst dat het signaal niet overeenkomt met de baanperiode van een dubbele neutronenster.

Vraag 2.

Een tweede optie is dat we te maken hebben met een pulserende ster. Witte dwergen pulseren aan periodes van enkele minuten.

a) Reken aan de hand van de typische stralen en massa's uit vraag 1b uit wat de dichtheid (ρ) van een witte dwerg en neutronenster is.

De dichtheid komt overeen met de massa gedeeld door het volume. Het volume van een witte dwerg en neutronenster vinden we via de formule voor het volume van een bol: $V = 4 \pi R^3 / 3$. Met de gegeven massa's en stralen uit vraag 1 vinden we volgende dichtheden:

$$\rho_{WD} = m_{WD} / V_{WD} = 1,2 \cdot 10^{30} / 1,4 \cdot 10^{21} = 8,6 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{NS} = m_{NS} / V_{NS} = 2,8 \cdot 10^{30} / 6,5 \cdot 10^{13} = 4,3 \cdot 10^{16} \text{ kg/m}^3$$

b) Je mag nu aannemen dat pulsatieperiodes evenredig zijn met $1/\sqrt{\rho}$. Als een witte dwerg een pulsatieperiode van 100 seconden heeft, wat zou dan de overeenkomstige periode bij een neutronenster zijn?

We zien dat de dichtheid van een neutronenster een factor $5 \cdot 10^7$ groter is dan de dichtheid van een witte dwerg. Dit betekent dat de pulsatieperiodes een factor $(5 \cdot 10^7)^{1/2} \sim 7000$ korter zijn. Vergeleken met een pulsatieperiode van 100 s, zou een neutronenster dus een pulsatieperiode van enkele honderdsten van een seconde hebben.

c) Kan dit de waargenomen periode verklaren?

Neen, dit is veel korter dan het waargenomen signaal.

Vraag 3.

Een derde optie is dat de periode overeenkomt met de rotatieperiode van een ster. De kortste rotatieperiode die een ster kan hebben, is de periode waarop de centripetale kracht en de gravitatiekracht aan de evenaar gelijk worden. Roteert de ster sneller, dan zou ze uit elkaar vliegen.

a) Reken de minimale periode uit voor dezelfde witte dwerg en neutronenster als in vraag 1b.

De maximale rotatiesnelheid vinden we door de centripetale versnelling op de evenaar gelijk te stellen aan de zwaartekrachtsversnelling. Gezien $R \omega_{\max}^2 = G M / R^2$ vinden we dat

$$\omega_{\max} = (G M / R^3)^{1/2}$$

De minimale rotatieperiode vinden we dan als volgt:

$$P_{\min} = 2 \pi / \omega_{\max} = 2 \pi (R^3/GM)^{1/2}$$

Voor de witte dwerg uit vraag 1 vinden we dan een minimale rotatieperiode van 13 s en voor de neutronenster 0,002 s.

b) Kan dit de waargenomen periodiciteit van 1,337 seconde verklaren?

De minimale rotatieperiode van de witte dwerg is te lang om het waargenomen signaal te verklaren. Die van de neutronenster is echter kort genoeg. Aangezien het de minimale rotatieperiode betreft, kan de rotatie van een neutronenster dus perfect 1,337 s bedragen.

Vraag 4.

a) Wat is een pulsar?

Een pulsar is een snel roterende neutronenster.

b) Komt dit overeen met wat je uit de ruwe schattingen in de vorige vragen kan besluiten?

Ja, alle andere scenario's bleken onmogelijk.

c) Wat als je weet dat er ook milliseconde pulsars bestaan met periodes van enkele milliseconden?

Ook milliseconde pulsars kunnen roterende neutronensterren zijn, aangezien we voor een neutronenster van $1,4 M_{\odot}$ en met een straal van 25 km vonden dat deze een rotatieperiode kan hebben van slechts 0,002 s.

Open vragenreeks IV: massabepaling

Vraag 1: Massabepaling van zwarte gaten.

Met behulp van een 8 meter telescoop nemen we het centrum van ons Melkwegstelsel op regelmatige basis waar gedurende 20 jaar. We zien dat een bepaalde ster op een rechte lijn heen en weer beweegt: we kijken in de richting van het vlak waarin de ster in een elliptische baan beweegt. Daarnaast nemen we spectra van deze ster om zijn radiële snelheid V_r te bepalen. Je meet de hoekafstand (aan de hemel) tussen de 2 uiterste punten en deze bedraagt $s = 0,248''$. Daarnaast bepaal je ook nog de periode van de omwenteling, deze bedraagt $P = 15,24$ jaar. We meten ook nog de radiële snelheden in de uiterste punten: $v_1 = 473$ km/s en $v_2 = 7326$ km/s. Bovendien nemen we aan dat de zwaartekracht grotendeels afkomstig is van de massa van het zwarte gat.

a) Bereken de grootte van de halve lange as a van de ellips (in astronomische eenheden).

We kunnen de grootte van de halve lange as a bepalen met behulp van de hoekafstand tussen de twee uiterste punten van de beweging die de ster aflegt, aangezien we het sterrenstelsel 'edge-on' bekijken. Hiervoor maken we gebruik van de vergelijking voor de parallax:

$$a^{(\text{AE})} / d^{(\text{pc})} = \tan (s/2) \approx s/2 \text{ (rad)}$$

De factor 2 is afkomstig van het feit dat de totale beweging van de ster twee keer de halve lange as vertegenwoordigt.

Aldus vinden we

$$a = 0,5 (s/1'') (d/1\text{pc}) \text{ AE} = 992 \text{ AE} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ pc}$$

waarbij gebruik gemaakt is van het feit dat wij ons op een afstand $d = 8000$ pc van het centrum van ons Melkwegstelsel bevinden.

b) Welk punt van de extrema ligt het dichtst bij het zwarte gat en waarom? Welke is de snelheid in het pericenter en welke in het apocenter?

De perkenwet of tweede wet van Kepler stelt dat de snelheid van een planeet in haar omloopbaan verandert zodanig dat in gelijke tijdsintervallen de oppervlakte, bestreken door de verbindingslijn (voorstraal) tussen de ster en de planeet, gelijk is. In ons geval, met het zwarte gat en de ster, is dit eveneens geldig en zal de ster dus sneller bewegen wanneer ze zich het dichtst bij het zwarte gat bevindt dan wanneer ze zich verder bevindt. Bovendien wordt het punt van dichtste nadering het pericenter en het punt waarin beide zich het verste van elkaar bevinden het apocenter genoemd. Bijgevolg geldt het volgende:

$$v_1 = 473 \text{ km/sec} = v_{\text{a(pocenter)}}$$

$$v_2 = 7326 \text{ km/sec} = v_{\text{p(ericenter)}}$$

c) Bereken de excentriciteit e van de baan van de ster (tip: denk aan het behoud van hoekmoment).

De wet van behoud van hoekmomen (impulsmoment) stelt dat het impulsmoment in het apocenter en het pericenter gelijk moet zijn:

$$mvr|_{\text{p}} = mvr|_{\text{a}}$$

De massa van de ster zal tussen pericenter en apocenter niet veranderen, dus we kunnen de massa

schrappen in deze vergelijking. Bij een elliptische beweging geldt dat de afstanden r_p en r_a respectievelijk tot het pericentrum en tot het apocentrum, kunnen berekend worden als

$$r_p = a(1-e)$$

$$r_a = a(1+e)$$

Wanneer we dit invullen in de vergelijking van behoud van impulsmoment krijgen we:

$$v_a r_a = v_p r_p$$

zodat

$$v_a a(1+e) = v_p a(1-e)$$

en verder

$$(v_a + v_p) e = v_p - v_a$$

en uiteindelijk

$$e = (v_p - v_a) / (v_p + v_a)$$

wat resulteert in

$$e = (7326 \text{ km/s} - 473 \text{ km/s}) / (7326 \text{ km/s} + 473 \text{ km/s}) = 0,879$$

d) Bereken de massa van het centrale zwarte gat met behulp van behoud van energie.

Behoud van energie stelt dat de som van de kinetische en potentiële energie in elk punt van het traject even groot is. We gebruiken volgende uitdrukkingen voor de kinetische en potentiële energie:

$$E_k = mv^2/2$$

$$E_p = -GmM_{\text{BH}} / r$$

De som van beide moet in apocenter en pericenter gelijk zijn, bijgevolg:

$$mv_p^2/2 - GmM_{\text{BH}}/r_p = mv_a^2/2 - GmM_{\text{BH}}/r_a$$

zodat ook

$$v_p^2 - v_a^2 = 2GmM_{\text{BH}}(1/r_p - 1/r_a)$$

Wanneer we terug de definities voor de afstand van het pericentrum en apocentrum hierin substitueren krijgen we:

$$v_p^2 - v_a^2 = 2GM_{\text{BH}}(1/a(1-e) - 1/a(1+e))$$

waaruit verder volgt

$$v_p^2 - v_a^2 = GM_{\text{BH}}(4e/a(1-e^2))$$

Hieruit kunnen we de massa berekenen;

$$M_{\text{BH}} = (v_p^2 - v_a^2) a(1-e^2) / 4eG = 7,68 \cdot 10^{36} \text{ kg} = 3,86 \cdot 10^6 M_{\text{zon}}$$

Merk op dat het mogelijk is om dit resultaat te verifiëren aan de hand van de derde wet van Kepler.

Vraag 2: Massabepaling van een cluster van sterrenstelsels.

Sterrenstelsels komen ook vaak voor in groepen die elkaar gravitationeel beïnvloeden. Het gas dat zich rond deze sterrenstelsels bevindt, kan zo warm worden dat het röntgenstralen begint uit te stralen. Met behulp van deze röntgenstralen kunnen we de massa bepalen van de groep: we kunnen berekenen hoeveel zwaartekracht er nodig is om ervoor te zorgen dat het hete gas niet wordt weggeblazen. We vereenvoudigen ons systeem door te stellen dat het een sferisch symmetrische verdeling heeft met dichtheid van de vorm $\rho(r)$, dit wil zeggen dat de dichtheid enkel afhankelijk is van de afstand tot het centrum.

a) Toon aan met behulp van de vergelijking van hydrostatisch evenwicht (die veronderstelt dat de druk tegengewerkt wordt door de zwaartekracht) en met behulp van de ideale gaswet aan dat de massa binnen een straal r kan geschreven worden als:

$$M(r) = \frac{k}{\mu m_p} \frac{r^2}{G \rho(r)} \frac{d(-\rho T)}{dr}$$

Hierbij mag er verondersteld worden dat de gemiddelde massa m van een gasdeeltje geschreven kan worden als $m = \mu m_p$, waarbij $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg de massa van een proton voorstelt en dat voor een gas dat volledig bestaat uit geïoniseerd waterstof $m = 0,5$ (in plaats van $m = 0,6$ voor een gas met solaire samenstelling). Verder is $k = 1,381 \cdot 10^{-23}$ J/K de constante van Boltzmann.

De vergelijking voor hydrostatisch evenwicht leert ons hoe de druk p tegengewerkt wordt door de inwaartse gravitationele kracht. Voor een sferisch sterrenstelsel met gasdichtheid $\rho(r)$ geldt:

$$dP/dr = -\rho(r) GM(r) / r^2$$

Bovendien geldt voor een ideaal gas met temperatuur T , dichtheid ρ en massa $m = \mu m_p$:

$$P = \rho k T / (\mu m_p)$$

Met behulp van deze twee vergelijkingen krijgen we volgende uitdrukking voor de massa $M(r)$:

$$M(r) = \frac{k}{\mu m_p} \frac{r^2}{G \rho(r)} \frac{d(-\rho T)}{dr}$$

b) In de groep rond het elliptische sterrenstelsel NGC1550 meet men röntgenstralen met een temperatuur $T_x = 1,6 \cdot 10^7$ K en $\rho(r) \sim r^{-1,1}$ tot op 200 kpc. Bereken de massa van de groep.

Wanneer we dit toepassen voor de NGC1550 groep krijgen we de volgende uitdrukking:

$$M(r) = \frac{k}{\mu m_p} \frac{r^2}{G \rho(r)} \frac{d(-r^{-1,1} T)}{dr}$$

zodat

$$M(r) = \frac{k}{\mu m_p G} \frac{r^2}{r^{-1,1}} 1,1 r^{-2,1} T$$

wat zich laat herleiden tot

$$M(r) = \frac{1,1 k}{\mu m_p G} r T$$

waaruit volgt dat $M(r) = 2,68 \cdot 10^{43}$ kg = $1,35 \cdot 10^{13} M_\odot$.

c) De B-band luminositeit van deze groep bedraagt $L_B = 8 \cdot 10^{10} L_\odot$. Bereken de massa-lichtkracht verhouding (in eenheden M_\odot/L_\odot).

Voor de massa-lichtkracht verhouding bekomen we

$$M / L = 1,35 \cdot 10^{13} M_\odot / 8 \cdot 10^{10} L_\odot$$

wat resulteert in

$$M / L = 156,25 M_\odot/L_\odot$$

Open vragenreeks V: gravitationele lenzen

Vraag 1: De lensvergelijking.

a) Wat is een gravitationele lens? En wat is het verschil met een optische lens?

Een gravitationele lens is een object tussen de waarnemer en een verre bron dat in staat is om licht af te buigen op zijn weg van de bron naar de waarnemer.

Enkele verschillen met een optische lens:

- De maximale afbuiging gebeurt het dichtst bij het centrum voor een gravitationele lens terwijl voor een optische lens dit verder van het centrum gebeurt. Omgekeerd is er minimale afbuiging bij een gravitationele lens ver van het centrum terwijl de minimale afbuiging bij een optische lens in het centrum gebeurt. Bij een optische lens zullen de stralen die door het centrum van de lens gaan helemaal geen afwijking vertonen.
- De gravitationele lens heeft een brandlijn in plaats van een brandpunt. Dit zal ervoor zorgen dat er meervoudige beeldvorming mogelijk wordt.

b) Welke drie soorten gravitationele lensing zijn er en beschrijf ze kort.

De verschillende soorten gravitationele lensing zijn:

- Sterke lensing: geeft aanleiding tot zichtbare verstoringen (beelden als Einsteinringen, bogen en meerdere beelden).
- Zwakke lensing: de verstoringen zijn veel zwakker en kunnen enkel onderzocht worden door een groot aantal bronnen te onderzoeken en de statistische afwijkingen te bepalen.
- Microlensing: er kan geen verstoring gezien worden, maar de hoeveelheid opgevangen licht verandert met de tijd; een voorbeeld hiervan is een ster (in ons Melkwegstelsel) die voorbij een object passeert.

c) Zowel door de klassieke (Newtoniaanse) mechanica als door de relativiteitstheorie van Einstein wordt de afbuiging van licht voorspeld. Waarin verschillen beide voorspellingen? Wie van beide heeft het bij het rechte eind en hoe werd dit voor de eerste keer aangetoond?

De afwijking die door Einstein voorspeld werd, is dubbel zo groot als de afwijking die door Newton voorspeld is.

Dit werd door Eddington aangetoond bij een zonsverduistering in 1919. Hij mat de posities van de sterren gedurende de zonsverduistering en gedurende de nacht en kon aan de hand van deze metingen het verschil tussen beide bepalen en zo de invloed van de zon op de baan van hun uitgezonden licht berekenen.

d) Beschouw de figuur rechts.

Hierop stelt ξ de afstand van de lichtstraal tot aan het centrum van de lens voor. Omdat het licht slechts onder een kleine hoek zal afbuigen, kunnen we

$$\xi = D_d \theta \quad (1)$$

schrijven.

Verder kan men in de algemene relativiteitstheorie aantonen dat

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2 \xi} \quad (2)$$

waarin G de algemene gravitatieconstante is, $M(\xi)$ de massa binnen een straal ξ is en c de snelheid van het licht in vacuüm.

Uit de figuur volgt op triviale wijze dat

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \quad (3)$$

En deze uitdrukking wordt de lensvergelijking genoemd ($\alpha(\theta)$ betekent niets anders dan dat α functie, en dus afhankelijk is van θ).

Bewijs nu zelf de vergelijking

$$\alpha = \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha} \quad (4)$$

We vinden dat $\tan \theta = \frac{\xi}{D_d}$ en $\tan \beta = \frac{\eta}{D_s}$.

Gezien echter zowel θ als β kleine hoeken zijn, geldt bij benadering dat $\theta \approx \tan \theta$ en $\beta \approx \tan \beta$, en dus ook $\theta = \frac{\xi}{D_d}$ en $\beta = \frac{\eta}{D_s}$.

Aangezien $\xi = \eta$ vinden we hieruit dat

$$\theta D_d = \beta D_s$$

Verder volgt hieruit

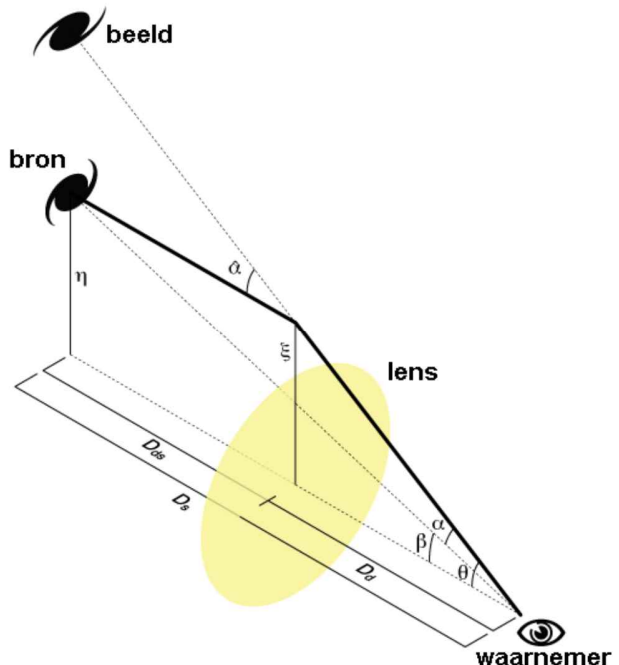
$$\hat{\alpha} D_d = (\hat{\alpha} - \alpha) D_s$$

en dus

$$\alpha D_s = \hat{\alpha} (D_s - D_d)$$

of uiteindelijk

$$\alpha = \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha}$$



Vraag 2: Puntlenzen.

a) Stel de lensvergelijking ($\beta(\theta)$) op voor een puntlens (tip: $M(\xi) = M$ voor een puntlens).

Uit $\xi = D_d \theta$, vergelijking (1), vergelijking (2) en $\beta = \theta - \alpha$ volgt dat:

$$\beta(\theta) = \theta - \frac{D_{ds}}{D_s D_d} \frac{4GM}{c^2 \theta}$$

b) Als de bron, de lens en de waarnemer exact op één lijn liggen, dan zal het beeld van de lens een cirkel vormen. Bereken de straal θ_E van deze cirkel. Deze straal wordt de Einsteinstraal genoemd.

Doordat alles op één lijn ligt volgt dat $\beta = 0$.

Dit invullen in de lensvergelijking levert:

$$\theta_E^2 = \frac{D_{ds}}{D_s D_d} \frac{4GM}{c^2}$$

Hieruit volgt triviaal (aangezien θ_E positief gedefinieerd is) dat

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{ds}}{D_s D_d} \frac{4GM}{c^2}}$$

c) Definieer $u = \beta / \theta_E$ en $x = \theta / \theta_E$. Bereken nu de oplossingen x voor de lensvergelijking in functie van u . Hoeveel oplossingen heb je? Wat merk je op aan deze oplossingen? (Tip: vergelijk met de Einsteinstraal.)

Met de gegeven definities wordt de lensvergelijking omgevormd tot

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

of nog

$$\frac{\beta}{\theta_E} = \frac{\theta}{\theta_E} - \frac{\theta_E}{\theta}$$

zodat uiteindelijk

$$u = x - \frac{1}{x}$$

wat zich verder laat herleiden tot

$$x^2 - ux - 1 = 0$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking, waarvan de oplossingen gegeven worden door:

$$x_+ = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4}}{2} \text{ en } x_- = \frac{-u - \sqrt{u^2 + 4}}{2}$$

Als nu $u = \beta = 0$, dan volgt $x_+ = 1$ en $x_- = -1$ waaruit volgt dat $|\theta| = \theta_E$.

Zoniet hebben we dat

$$\lim_{u \rightarrow 0} x_+ < 1 \Rightarrow \theta_+ < \theta_E$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} x_- > 1 \Rightarrow \theta_- > \theta_E$$

Dus ligt er 1 van beide beelden steeds binnen de Einsteinstraal en 1 beeld steeds buiten de Einsteinstraal.

d) Wat gebeurt er als de bron zich van de optische as verwijderd (dus wat gebeurt er als β groter wordt)?

Voor grote waarden van u krijgen we

$$\lim_{u \rightarrow \infty} x_+ = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} x_- = -u$$

Dus voor grote hoeken zien we geen effecten meer van de gravitationele lens, wat te verwachten viel.

e) Kun je een voorbeeld geven van een astronomisch fenomeen dat als puntlens fungeert (kort antwoorden)?

Een stellair zwart gat.

Vraag 3: Cirkelsymmetrische lenzen.

Voor een cirkelsymmetrische lens kunnen we de lensvergelijking schrijven als

$$\beta(\theta) = \theta - \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{4GM(\theta)}{c^2 \theta} \quad (5)$$

Definiëren we de kritische oppervlakedichtheid als

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \quad (6)$$

dan wordt de lensvergelijking gegeven door

$$\beta = \theta \left(1 - \frac{\langle \Sigma \rangle(\theta)}{\Sigma_{cr}} \right) \quad (7)$$

waarbij

$$\langle \Sigma \rangle(\theta) = \frac{M(\theta)}{\pi(D_d \theta)^2} \quad (8)$$

de gemiddelde oppervlakedichtheid van de lens voorstelt binnen een cirkel met straal θ .

Als nu voor alle θ de dichtheid $\langle \Sigma \rangle(\theta) \leq \Sigma_{cr}$ dan zal het rechterlid van vergelijking (7) altijd positief zijn, wat er op neerkomt dat er slechts één beeld van de oorspronkelijke bron gevormd wordt. Wordt de oppervlakedichtheid ergens groter dan de kritische dichtheid, dan kan β ook negatief worden en zal er meervoudige beeldvorming ontstaan, wat voor cirkelsymmetrische lenzen neerkomt op de vorming van 3 beelden.

a) Beschouw een sferische massaverdeling waarvan het dichtheidsprofiel gegeven wordt door

$$\rho_H(r) = \frac{1}{4\pi G} \frac{V^2}{r^2 + a_s^2} \quad (9)$$

waarbij r de afstand is tot het middelpunt van de lens ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), V een arbitraire constante en een a_s schaallengte voorstelt. Toon aan dat de oppervlakedichtheid $\Sigma(R)$ van deze massaverdeling geschreven kan worden als

$$\Sigma(R) = \frac{1}{4G} \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + a_s^2}} \quad (10)$$

waarin R de straal in het hemelvlak is ($R^2 = x^2 + y^2$). (Tip: de oppervlakedichtheid kan berekend worden door over de gezichtslijn (z -coördinaat) te integreren.)

De oppervlakedichtheid kan berekend worden aan de hand van $\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r) dz$.
Hierin de dichtheid invullen levert, met $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + z^2$:

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V^2}{4\pi G(R^2 + z^2 + a_s^2)} dz$$

waaruit

$$\Sigma(R) = \frac{1}{4\pi G} \frac{V^2}{R^2 + a_s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\sqrt{R^2 + a_s^2}}\right)^2} dz$$

Door over te gaan op de veranderlijke $x = \frac{r}{\sqrt{R^2 + a_s^2}}$ vinden we

$$\Sigma(R) = \frac{1}{4\pi G} \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + a_s^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx$$

zodat

$$\Sigma(R) = \frac{1}{4\pi G} \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + a_s^2}} [Bgtan(x)]_{-\infty}^{+\infty}$$

en uiteindelijk

$$\Sigma(R) = \frac{1}{4\pi G} \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + a_s^2}} \pi = \frac{1}{4G} \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + a_s^2}}$$

b) Bepaal de massa binnen een straal b vertrekkende van de uitdrukking voor de oppervlakedichtheid.

De massa binnen een straal b wordt gegeven door

$$M(b) = 2\pi \int_0^b \Sigma(R) R dR$$

$$M(b) = 2\pi \int_0^b \frac{1}{4G} \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + a_s^2}} R dR$$

Overgaan op $x = a_s^2 + R^2$ levert

$$M(b) = \int_{a_s^2}^{b^2 + a_s^2} \frac{V^2}{4G} \frac{\pi}{\sqrt{x}} dx$$

zodat

$$M(b) = \frac{\pi V^2}{2G} \left(\sqrt{a_s^2 + b^2} - \sqrt{a_s^2} \right)$$

c) Bereken de voorwaarde voor a_s zodat er meervoudige beeldvorming mogelijk zou zijn. (Ga uit van het gegeven dat voor een cirkelsymmetrische lens $\langle \Sigma \rangle(\theta) \leq \Sigma_{cr}$ als $\langle \Sigma \rangle(0) \leq \Sigma_{cr}$.)

Voorwaarde voor meervoudige beeldvorming is $\Sigma(0) \geq \Sigma_{cr}$, waaruit volgt

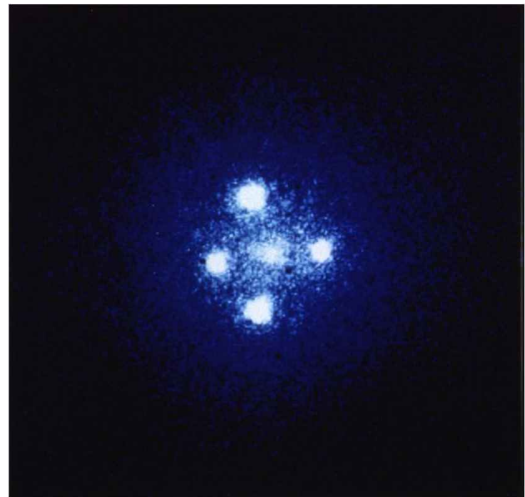
$$\frac{V^2}{4Ga_s} \geq \frac{c^2 D_s}{D_d D_{ds} 4\pi G}$$

Hierdoor krijgen we

$$\frac{\pi V^2 D_d D_{ds}}{c^2 D_s} \geq a_s$$

Vraag 4: Assymetrische lenzen.

Op de figuur rechts wordt een quasar gelensd. Dit beeld is het Einsteinkruis of QSO 2237+0305. Doordat de lens, de waarnemer en de bron mooi op één lijn liggen, zal het gelensde beeld er uit zien zoals weergegeven op de foto. Deze quasar wordt waargenomen met een roodverschuiving van $z = 1,695$ en wordt gelensd door een spiraalgalaxie op roodverschuiving $0,039$.



a) Wat is de afstand van de waarnemer tot de lens?

De relativistische roodverschuiving wordt gegeven door:

$$z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1$$

Eenmaal de snelheid van een object gekend is, kan de wet van Hubble $H_0 = v/d$ gebruikt worden om de afstand tot dat object te bepalen.

Uit $z = 1.695$ volgt $v_q = 0.76c$ en daaruit volgt $D_s = 3159 \text{ Mpc}$.

Uit $z = 0.039$ volgt $v_g = 0.039c$ en daaruit volgt $D_d = 159.3 \text{ Mpc}$.

Bijgevolg is $D_{ds} = D_d - D_s = 2998.83 \text{ Mpc}$.

b) Bepaald de kritische dichtheid (in M_\odot/pc^2).

Op basis van formule (6) vinden we

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} = 11002 M_{zon}/\text{pc}^2$$

c) Vier van de vijf beelden liggen bij benadering op een cirkel met een straal van $0,9''$. Als we deze waarde aannemen voor de Einsteinstraal, wat is dan de corresponderende straal in het lensvlak?

Op basis van formule (1) vinden we

$$\xi_E = D_d \theta_E = 0.66 \text{ kpc}$$

(uiteraard mits de correcte omzetting van boogseconden naar radialen).

d) Bepaal de massa (in M_\odot) binnen deze straal van de spiraalgalaxie.

Aangezien de lens, de bron en de waarnemer op één lijn liggen bij een Einsteinkruis volgt dat

$$\beta = 0 = \theta_E \left[1 - \frac{1}{\Sigma_{cr}} \frac{M(< \xi_E)}{\pi \xi_E^2} \right]$$

Dit leidt tot

$$M(< \xi_E) = \Sigma_{cr} \pi \xi_E^2 = 1.67 \times 10^{10} M_{zon}$$

Dit is het einde van de eerste ronde van
de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2013.