Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2019

Oplossingen

10 april 2019

In dit document worden oplossingen voorgesteld voor de vragen van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2019. Het spreekt voor zich dat andere methodes eventueel ook tot correcte oplossingen kunnen leiden.

Vlaamse Sterrenkunde Olympiade
Vereniging Voor Sterrenkunde
Oostmeers 122c
8000 Brugge

Het organiserend comité van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2019: Robin Baeyens (KULeuven), Robin Björklund (KULeuven), Jelle Dhaene (UGent), Frank Tamsin (VVS) en Sébastien Viaene (UGent).

http://www.sterrenkundeolympiade.be
info@sterrenkundeolympiade.be

Meerkeuze vragenreeks

1. Het is middernacht en je ziet de planeet Venus recht boven je hoofd (in het zenit).
a) Venus bereikt op dat moment haar grootste elongatie.
b) Het is 21 maart.
c) Je bevindt je op de evenaar.
d) Je staat op de noordpool.
e) Je lijdt aan hallucinaties.

De maximale elongatie (de hoek tussen de richting van de Zon en de richting van Venus gezien vanaf de Aarde) van Venus bedraagt ongeveer 48°. De planeet kan dus nooit om middernacht in het zenit staan (ook niet in het geval van middernachtzon).

2. Hoe ver is de horizon verwijderd van iemand die rechtop staat en ongeveer 1,8 m groot is? We gaan er hierbij van uit dat de waarneming gebeurt op een vlak terrein op zeeniveau en dat er geen bergen in de buurt zijn. Effecten van atmosferische refractie en afplatting van de Aarde mogen verwaarloosd worden.
a) 2,4 km.
b) 4,8 km.
c) 24 km.
d) 48 km.
e) 240 km.

Zij M het middelpunt van de Aarde en A het oog van de waarnemer. Vanuit het oog van de waarnemer beschouwen we een raaklijn aan het aardoppervlak; het raakpunt B bevindt zich op de horizon. Aldus ontstaat een rechthoekige driehoek met rechte hoek in B en de gevraagde afstand is AB. Gegeven de straal van de Aarde MB = 6371 km, vinden we via de stelling van Pythagoras:

$$AB = \sqrt{MA^2 - MB^2} = \sqrt{(6371001{,}8\ m)^2 - (6371000\ m)^2} = 4789\ m$$

3. Op welk van volgende plaatsen is de lengte van de kortste dag van het jaar ongeveer half zo lang als de lengte van de langste nacht van het jaar?
a) Dubai (op 25° noorderbreedte).
b) Londen (op 52° noorderbreedte).
c) Rio de Janeiro (op 23° zuiderbreedte).
d) Tromsø (op 70° noorderbreedte).
e) Geen van bovenstaande.

Er bestaan uiteraard formules om dit uit te rekenen, maar het valt ook te beredeneren. Boven de poolcirkel kan er poolnacht optreden (het verschijnsel waarbij de Zon 24 uur niet boven de horizon uitkomt). Nabij de keerkringen blijft het verschil tussen de lengte van de dag en de nacht eerder beperkt. Op gematigde breedten (zoals de onze) duurt de dag bij midwinterzonnewende ongeveer half zo lang als de nacht.

4. Een 10 inch lenzenkijker met een openingsverhouding (dit is de verhouding tussen de brandpuntsafstand en de diameter) van f/10 wordt gebruikt in combinatie met een 25 mm oculair (1 inch = 2,54 cm). Wat is de vergroting van deze combinatie?
a) 10 ×.
b) 50 ×.
c) 100 ×.
d) 200 ×.
e) 254 ×.

Gezien het gaat om een f/10 kijker met een diameter van 10 inch = 25,4 cm, bedraagt de brandpuntsafstand van deze telescoop 10 × 25,4 cm = 254 cm = 2540 mm. De vergroting wordt bekomen door de brandpuntsafstand van de telescoop te delen door de brandpuntsafstand van het oculair: 2540 mm / 25 mm.

5. Een astronomische interferometer is een reeks van afzonderlijke radiotelescopen die samenwerken als één enkele telescoop. Welke van de volgende ingrepen zal het oplossend vermogen van de telescoop het meest verbeteren?
a) Het vergroten van de basislijn (of de afstand tussen de telescopen).
b) Het vergroten van het aantal telescopen per oppervlakte-eenheid.
c) Het vergroten van de diameter van elke telescoop.
d) Het vergroten van de stroomtoevoer voor elke telescoop.
e) Het verkleinen van de basislijn (of de afstand tussen de telescopen).

Ruwweg kan men stellen dat voor wat betreft het oplossend vermogen, een interferometer het effect heeft van een telescoop met een diameter die overeenkomt met de afstand tussen de afzonderlijke instrumenten (de ‘baseline’).

6. Bij welk van de volgende maanfasen is de getijdenbult op Aarde het grootst?
a) Volle maan.
b) Eerste kwartier.
c) Toenemende maan vlak voor volle maan.
d) Afnemende maan vlak na volle maan.
e) Toenemende maan vlak tussen nieuwe maan en eerste kwartier.

Zie bijvoorbeeld *https://earthsky.org/earth/tides-and-the-pull-of-the-moon-and-sun* of *https://www.universiteitvanvlaanderen.be/college/waarom-er-eb-en-vloed/*.
De getijden zelf lopen wat ‘achter’. Je zou verwachten dat het springtij is bij volle maan en bij nieuwe maan. Het blijkt echter twee dagen later te vallen. De watermassa is niet homogeen verdeeld over de Aarde. De zeeën en oceanen zijn niet overal even diep en de kusten zijn grillig gevormd. Op de meeste breedtegraden is de baansnelheid van het aardoppervlak veel groter dan de maximale golfsnelheid, waardoor de getijgolf met de Aarde meedraait en daardoor voorligt op de Zon en de Maan.

7. De hooglanden op de Maan
a) zijn ouder dan de zeeën op de Maan.
b) zijn bedekt met regoliet.
c) bestaan hoofdzakelijk uit ijzeroxide.
d) vertonen weinig bekratering.
e) voldoen zowel aan a als aan b.

Op de Maan is een duidelijk contrast zichtbaar tussen de heldere en donkere zones. Lichtere oppervlakken zijn de hooglanden, die de naam terrae krijgen (enkelvoud terra), en de donkere vlaktes worden zeeën of maria (enkelvoudige mare) genoemd. De hooglanden zijn anorthositisch qua samenstelling, terwijl de maria basaltisch zijn. De hooglanden zijn ouder dan de zichtbare maria en zijn daarom zwaarder bekraterd.

8. Welke planeet is verantwoordelijk voor de Kirkwood-leemten?
a) De Aarde.
b) Jupiter.
c) Saturnus.
d) Uranus.
e) Neptunus.

Een Kirkwood leemte is een zone in de planetoïdengordel waar veel minder planetoïden voorkomen dan in de directe omgeving, als gevolg van storingen door de aantrekkingskracht van de planeet Jupiter. Alle Kirkwoodscheidingen bevinden zich op plaatsen waar de omloopstijd om de Zon een simpele fractie zou zijn (bijvoorbeeld 1/3, 2/5, enzovoort) van de omloopstijd van Jupiter (11,86 jaar). Zo is er een Kirkwoodscheiding op 2,501 AE van de Zon. Stel dat daar een planetoïde zou bewegen. Zijn omloopstijd om de Zon zou daar 3,954 jaar zijn en dat is precies 1/3 van de omloopstijd van Jupiter (11,86 jaar). Door die verhouding van één op drie zou de planetoïde na iedere drie omlopen opnieuw Jupiter passeren, telkens op dezelfde plaats en dus ook telkens opnieuw dezelfde zwaartekracht van Jupiter ondervinden. Die periodieke kracht zou de planetoïde al vrij snel uit zijn baan trekken. Banen in de Kirkwoodscheidingen zijn dus instabiel. Deze zelfde redenering geldt voor alle Kirkwoodscheidingen. Er zijn er gevonden bij omloopstijden die 1/4, 2/7, 1/3, 3/8, 2/5, 3/7, 1/2 of 3/5 bedragen van de omloopstijd van Jupiter. Kirkwoodscheidingen zijn een bijzonder geval van baanresonantie.

9. Voor een bepaalde komeet zijn volgende baanelementen van toepassing: e = 1,2 en a = 19 AE (astronomische eenheden). Als de komeet op Aarde zichtbaar was in 2018, in welk jaar zal ze dan opnieuw te zien zijn?
a) 2080.
b) 2100.
c) 2109.
d) 2130.
e) De komeet zal niet meer opnieuw zichtbaar worden.

Gezien de excentriciteit van de komeetbaan e = 1,2 > 1 beweegt de komeet op een hyperbolische baan. Het is dus geen periodieke komeet. Derhalve kan de derde wet van Kepler hier dus niet zomaar toegepast worden.

10. Veronderstel dat je op een planeet zou staan met dezelfde massa als de Aarde, maar waarvan de straal drie keer groter is. Dan is de gravitatiekracht die je aan het oppervlak van die planeet zou ondervinden
a) dezelfde als op de Aarde, aangezien beide planeten dezelfde massa hebben.
b) drie keer zwakker dan op de Aarde.
c) drie keer sterker dan op de Aarde.
d) negen keer zwakker dan op de Aarde.
e) zes keer zwakker dan op de Aarde.

De gravitatiekracht kan beschreven worden aan de hand van de valversnelling $g_P = \frac{GM_P}{(R_P)^2}$ met M_P en R_P respectievelijk de massa en de straal van de planeet en G de universele gravitatieconstante. Gezien $M_P = M_A$ en $R_P = 3R_A$ (met M_A en R_A de massa en de straal van de Aarde) vinden we $g_P = \frac{GM_P}{(R_P)^2} = \frac{GM_A}{(3R_A)^2} = \frac{1}{9} g_A$.

11. Welk van onderstaande technieken is nog niet met succes toegepast om exoplaneten te vinden?
a) Radar.
b) Rechtstreekse waarneming.
c) Spectroscopische waarneming van radiële snelheden.
d) Eclipsen.
e) Geen enkele: alle bovenstaande methodes hebben reeds exoplaneten aan het licht gebracht.

De eerste ontdekkingen van exoplaneten gebeurden door spectroscopische waarnemingen van radiële snelheden. Later werden er vele planeten ontdekt via de eclipsmethode (of transitmethode) en pas recent via rechtstreekse waarnemingen. Een accurate afstandsbepaling of detectie via radar is tot nu toe enkel in ons eigen zonnestelsel gebeurd. Het is enorm moeilijk om een krachtig en goed gericht radarsignaal te produceren dat tot aan de meest nabije sterren zou reiken. Daar moet het nog gereflecteerd worden en terug de Aarde bereiken. Op die manier zouden radarmetingen er tien tot duizenden jaren over doen.

12. Een ster heeft een parallax van 0,008”. De straal van deze ster is 7,5 keer groter dan de straal van onze Zon en de spectraalklasse van deze ster is B 0.3 IV (die van de Zon is G 2 V). Welk van volgende waarden benadert het best de lichtkracht van deze ster?
a) 36 $L_\odot$.
b) 56 $L_\odot$.
c) 540 $L_\odot$.
d) 3200 $L_\odot$.
e) 30000 $L_\odot$.

Dit zou bijvoorbeeld over de ster Dschubba (δ Sco) kunnen gaan. We beschouwen sterren in dit verband als zwarte stralers. De wet van Stefan-Boltzmann geeft het verband tussen de lichtkracht L van een zwarte straler, en de straal R en de temperatuur T ervan, volgens $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ waarbij $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} de constante van Stefan-Boltzmann (of eerste stralingsconstante) is. Voor een ster van spectraalklasse B 0.3 IV kan $T = 28000$ K genomen worden en voor de Zon is $T_\odot = 5800\ K$.
Hieruit kunnen we afleiden dat $\frac{L}{L_\odot} = \frac{4\pi R^2\ \sigma T^4}{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 = (7{,}5)^2 \left(\frac{28000}{5800}\right)^4 \approx 30500.$

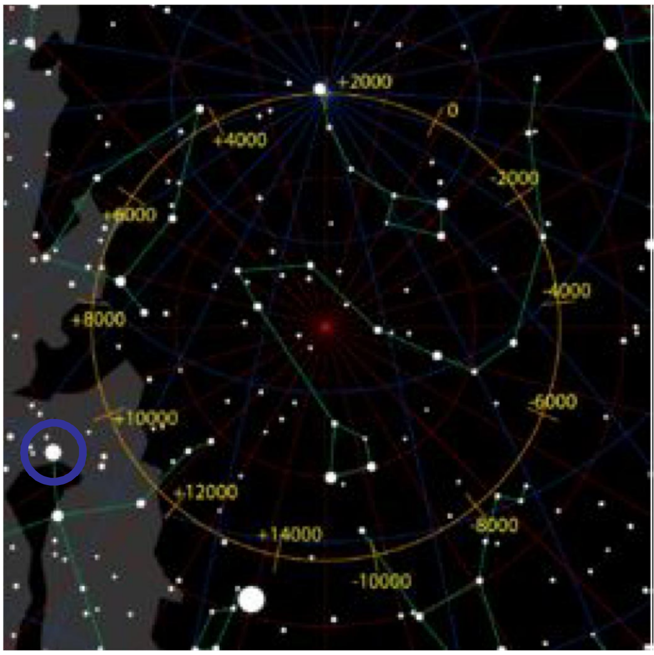
13. Beschouw een ster met absolute magnitude M_0. Veronderstel dat de ster zich opsplitst in N kleinere gelijkaardige sterren, alle met dezelfde temperatuur en gemiddelde dichtheid als de initiële ster, en dat de som van de massa’s van de N kleinere sterren gelijk is aan de initiële massa van de opgesplitste ster. Wat is in dit geval de gecombineerde absolute magnitude M van de N sterren samen? We nemen aan dat geen enkele ster licht van een andere ster tegenhoudt (i.e. de lichtkrachten mogen opgeteld worden).
a) $M = M_0 - \log N$
b) $M = M_0 - 2{,}5 \cdot \log N$
c) $\boldsymbol{M = M_0 - \frac{2{,}5}{3} \cdot \log N}$
d) $M = M_0 - \frac{2{,}5}{N}$
e) $M = M_0 - 2{,}5 \cdot N$

De lichtkracht L_0 van de initiële ster met straal R en temperatuur T is $L_0 = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Zij $\mathcal{M}$ de massa van de initiële ster en m de massa van elk van de N kleinere sterren. Dan is $\mathcal{M} = \mathrm{N}m$. Noem verder r de straal van elk van de kleinere sterren. Gezien we veronderstellen dat alle kleinere sterren dezelfde dichtheid hebben als de initiële ster, wordt ook het totale volume behouden en geldt $\frac{4}{3}\pi R^3 = \mathrm{N}\frac{4}{3}\pi r^3$ zodat $r = R \cdot N^{-1/3}$. De totale lichtkracht L van de N kleinere sterren (elk met dezelfde temperatuur als de oorspronkelijke ster) bedraagt dan $L = N(4\pi r^2 \sigma T^4) = N\left(4\pi R^2 N^{-2/3} \sigma T^4\right) = N^{1/3} L_0$.
De verhouding van de lichtkrachten I en L_0 en hun verschil in absolute magnitude $M - M_0$ kan berekend worden op basis van de formule van Pogson: $\frac{L}{L_0} = \left(\sqrt[5]{100}\right)^{M_0 - M}$ of nog $M_0 - M = 2{,}5 \cdot \log \frac{L}{L_0}$. Uiteindelijk vinden we $M = M_0 - 2{,}5 \cdot \log \frac{L}{L_0} = M_0 - 2{,}5 \cdot \log N^{1/3}$.

14. Een moleculaire wolk waarin sterren worden gevormd heeft een temperatuur van ongeveer 1000 K. Op welk van volgende golflengten zendt dit stervormingsgebied het meest straling uit?
a) 290 nm.
b) 485 nm.
c) 2900 nm.
d) 4850 nm.
e) 4850 Å.

Beschouwen we de moleculaire wolk als zwarte straler, dan wordt het verband tussen de golflengte λ_{max} waarbij de straling maximaal is, en de effectieve temperatuur T gegeven door de verschuivingswet van Wien: $\lambda_{max}.T = b$ waarbij b = 2,897756·10^{-3} K·m. Derhalve is $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$.
Merk op dat 1 ångström = 1 Å = 0,1 nm = 10^{-10} m.

15. Ten gevolge van de precessie van de equinoxen beschrijven de noordelijke en de zuidelijke hemelpool cirkels aan de hemelsfeer, met een periode van 25700 jaar. Bijgaande figuur toont de cirkel die die noordelijke hemelpool beschrijft. Momenteel bevindt de ster Polaris zich op minder dan een graad van de noordelijke hemelpool, en precies daarom ook wordt deze ster de Poolster genoemd. Welke ster van magnitude 1 zal zich in het jaar 10000 het dichtst bij de noordelijke hemelpool bevinden?
a) Vega.
b) Deneb.
c) Thuban.
d) Eltanin.
e) Alderamin.

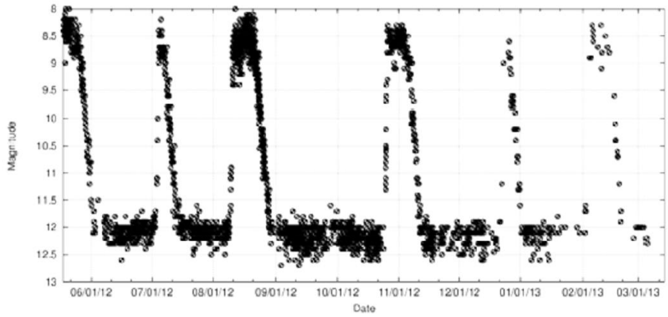


Op de figuur hiernaast staat linksonder het sterrenbeeld Zwaan (Cygnus). Deneb is aangeduid.

16. Hoe groot moet de massa van een ster zijn om een zuurstof-neon-magnesium witte dwerg te kunnen produceren?
a) tussen 4,5 en 6 zonsmassa's.
b) tussen 6 en 8 zonsmassa's.
c) tussen 8 en 10,5 zonsmassa's.
d) tussen 10,5 en 12 zonsmassa's.
e) meer dan 12 zonsmassa's.

Een ster moet zwaar genoeg zijn om na de CNO cyclus ook zwaardere elementen te fuseren. Echter, als de ster te zwaar wordt dan vindt deze fusie niet plaats en krijgen we een supernova.

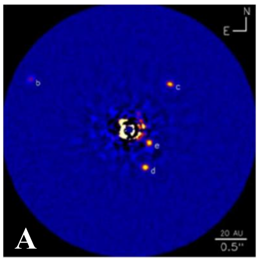
17. De lichtkromme die in de figuur getoond wordt, komt overeen met die van



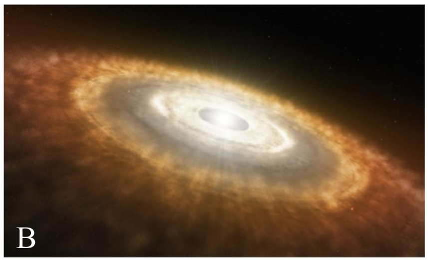
a) een Mira veranderlijke ster.
b) een recurrente nova.
c) een type Ia supernova.
d) een type II supernova.
e) een AM CVn systeem.

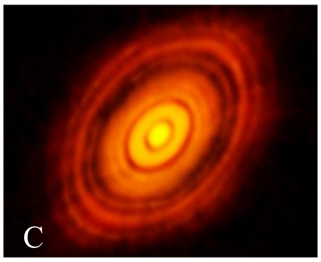
Dit is de lichtkromme van de ster SS Cygni.
Dit is een recurrente nova. Supernovae zijn uitgesloten want die hebben geen periodieke lichtcurve. Mira veranderlijke sterren hebben veel langere periodes. (Merk wel op dat de grafiek in Amerikaans datumformaat staat.) Ook de lichtkromme van AM CVn systemen vertoont een ander patroon.

18. Bijgaande afbeeldingen stellen verschillende stadia voor in het leven van een object.
Gevraagd is de beelden te rangschikken van jong naar oud.

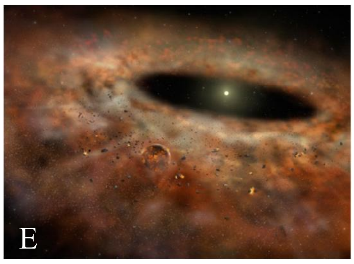


A


B


C


D


E

a) A – B – C – D – E
b) A – C – B – E – D
c) D – A – B – C – E
d) A – D – C – B – E
e) D – C – B – E – A

Sterren ontstaan in een moleculaire wolk van stof en gas (figuur D). Wanneer dit materiaal samentrekt en afkoelt, kunnen nieuwe sterren gevormd worden. Stof en gas zal via een accretieproces een schijf vormen (figuur C) en zo materiaal naar de protoster kanaliseren. Planeten krijgen tegelijk de kans om te vormen in de accretieschijf. Zij kuisen hun banen na verloop van tijd op zoals te zien is in de figuur. Eens kernfusie plaatsvindt in het centrum van de ster, stopt de accretie. De stellaire winden zorgen ervoor dat de schijf langzaam wordt weggeblazen (figuur B). Een volwassen planetenstelsel (figuur E) heeft een groot deel van zijn oorspronkelijke gasschijf vernietigd. Wat resteert, zijn planetoïden in de verafgelegen gebieden. Dit is te vergelijken met de Kuipergordel in ons zonnestelsel. Aan de binnenkant van een volwassen planetenstelsel zijn enkel nog planeten te vinden (figuur A).

19. Sterren A en B zijn hoofdreekssterren van hetzelfde spectraaltype. Hun schijnbare magnitude is respectievelijk 17 en 12. Ster A bevindt zich op een afstand van 1 kpc. Wat is dan de afstand van ster B?
a) 10 pc.
b) 100 pc.
c) 10 kpc.
d) 50 pc.
e) 100 kpc.

Volgens de afstandsformule staan de absolute magnitude M, de schijnbare magnitude m en de afstand d van een object met elkaar in verband als $M = m + 5 - 5\log d$, waarbij d dan noodzakelijk is uitgedrukt in parsec.
Gezien beide sterren hoofdreekssterren van hetzelfde spectraaltype zijn, hebben ze dezelfde absolute magnitude M. Deze kan berekend worden, gezien van ster A zowel de schijnbare magnitude $m_A = 17$ als de afstand $d_A = 1000$ pc bekend zijn, uit $M = m_A + 5 - 5\log d_A = 7$.
Vervolgens vinden we dan $d_B = 10^{\frac{m_B - M + 5}{5}} = 10^{\frac{12-7+5}{5}}\text{pc} = 100$ pc.
In feite is deze berekening evenwel niet nodig en kan dit ook beredeneerd worden. Een helderheidsverschil van 5 magnituden komt overeen met een factor 100 in flux. Deze neemt kwadratisch af met de afstand, zodat ster B een factor $\sqrt{100} = 10$ dichter moet staan dan ster A (die op 1 kpc = 1000 parsec staat).

20. Welk van volgende uitspraken is voor hoofdreekssterren van toepassing?
a) Hoe hoger de oppervlaktetemperatuur, hoe minder lichtkrachtig de sterren.
b) Hoe hoger de oppervlaktetemperatuur, hoe meer dergelijke sterren er zijn.
c) Hoe hoger de oppervlaktetemperatuur, hoe groter de massa van de sterren.
d) Er zijn meer dubbelsterren met een hoge dan met een lage oppervlaktetemperatuur.
e) Geen enkele van bovenstaande uitspraken is correct.

Op de hoofdreeks zijn sterren met een hogere oppervlaktetemperatuur ook lichtkrachtiger. Er zijn evenwel veel meer sterren met een lage oppervlaktetemperatuur dan met een hoge oppervlaktetemperatuur (ook bij de dubbelsterren). Hoofdreekssterren met een hoge oppervlaktetemperatuur zijn zware sterren.

21. Hoe groot zou de straal van de Zon worden als het een zwart gat zou worden (dus van 1 zonsmassa)?
a) Ongeveer 1 km.
b) Ongeveer 2 km.
c) Ongeveer 3 km.
d) Ongeveer 4 km.
e) Ongeveer 5 km.

De Schwarzschildstraal is de afstand van waar licht (snelst mogelijke fysische snelheid) nog net aan de gravitatie van het zwarte gat kan ontsnappen. Nu kan de ontsnappingssnelheid v van een object met massa m aan een ander object met massa M berekend worden door de wet van behoud van energie toe te passen: $\frac{GMm}{r} = \frac{mv^2}{2}$. Hierin stelt r de afstand van het object met massa m voor ten opzichte van het object (zwart gat) met massa M. Het linkerlid stelt de potentiële energie voor die overwonnen moet worden. Het rechterlid is de kinetische energie van het voorwerp met massa m en snelheid v. Hieruit kan berekend worden dat de ontsnappingssnelheid geschreven kan worden als $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Nu kan voor de Schwardzschildradius R_s de ontsnappingssnelheid gelijkgesteld worden aan de lichtsnelheid c, waaruit volgt: $\mathrm{R_s} = \frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{c}^2}$. Met de massa van de Zon $M = 1{,}99 \cdot 10^{30} kg$ vinden we dan $\mathrm{R_s} = \frac{2 \times 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \times 1{,}99 \cdot 10^{30} kg}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} = 2{,}95 \cdot 10^3\ m.$

22. Een open sterrenhoop is een groep van sterren die hoogstwaarschijnlijk op hetzelfde moment uit dezelfde moleculaire wolk is ontstaan. De leeftijd van zo'n open sterrenhoop kan bepaald worden door naar het Hertzsprung-Russell-diagram te kijken. Op welk van de volgende redeneringen is die tijdsbepaling berust?
a) In een oude open sterrenhoop worden geen zware sterren geboren.
b) In een oude open sterrenhoop worden geen lichte sterren geboren.
c) In een oude open sterrenhoop zijn de lichte sterren met spectraalklasse F, G, K, M al verder ontwikkeld als ster en ontbreken deze dus in de hoofdreeks in het Hertzsprung-Russell-diagram.
d) In een oude open sterrenhoop zijn zware sterren met spectraalklasse O, B, A al verder ontwikkeld als ster en ontbreken deze dus in de hoofdreeks in het Hertzsprung-Russell-diagram.
e) Geen van bovenstaande.

Zware sterren evolueren veel sneller dan lichtere sterren. De zware sterren verlaten dus als eerste de hoofdreeks.

23. Een astronoom heeft een spectrum genomen van een ver sterrenstelsel. Uit dit spectrum leidt hij af dat dit stelsel geen gas heeft en ook geen sterren vormt. Dit sterrenstelsel is dus naar alle waarschijnlijkheid
a) een spiraalstelsel.
b) een Seyfertstelsel.
c) een elliptisch stelsel.
d) een planetaire nevel.
e) een quasar.

Spiraalstelsels bevatten wel gas en er is ook actieve stervorming. Bij elliptische stelsels is dit niet het geval. Seyfertstelsels zijn een klasse van sterrenstelsels met kernen die spectraallijn-emissie produceren uit sterk geïoniseerd gas. Een quasar is een actief centrum van een ver verwijderd jong sterrenstelsel. Planetaire nevels zijn geen sterrenstelsels en er worden ook geen sterren gevormd.

24. Een bepaald sterrenstelsel heeft een straal van 40000 lichtjaar, en aan de rand van dat stelsel beschrijven de sterren hun baan met een snelheid van 50 km/s. Veronderstel dat het stelsel geen donkere materie bevat. Wat is dan de minimale massa van dit stelsel (uitgedrukt in zonsmassa's; 1 $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg).
a) $6{,}87 \cdot 10^{8}$ $M_\odot$.
b) $3{,}57 \cdot 10^{9}$ $M_\odot$.
c) $4{,}21 \cdot 10^{11}$ $M_\odot$.
d) $9{,}69 \cdot 10^{12}$ $M_\odot$.
e) $4{,}37 \cdot 10^{13}$ $M_\odot$.

Wanneer we een testmassa *m* beschouwen die zich op een afstand *r* van het centrum van een sterrenstelsel bevindt, dan ondervindt die de gravitatiekracht van alle massa *M(r)* die zich binnen een straal *r* van het centrum van het sterrenstelsel ophoudt.
Anderzijds leert de dynamica van de cirkelvormige beweging dat de centripetale versnelling van dergelijke testmassa $(v(r))^2 / r$ is, waarbij *v(r)* de rotatiesnelheid van de testmassa is.
Als we deze twee zaken combineren, komen we tot $G\frac{mM(r)}{r^2} = m\frac{(v(r))^2}{r}$ waaruit volgt dat $M(r) = \frac{(v(r))^2 r}{G}$ met $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} de universele gravitatieconstante.
We $M(40000 \text{ lichtjaar}) = 1{,}42 \cdot 10^{40} \text{ kg} \approx 7 \cdot 10^{9}\ M_\odot$.

25. In welk gebied van het Melkwegstelsel komen de meeste sterren van populatie I voor?
a) Populatie I sterren zijn uniform verdeeld over alle gebieden van het Melkwegstelsel.
b) Populatie I sterren komen het meest voor in de centrale verdikking (de zogenoemde bulge) van het Melkwegstelsel.
c) Populatie I sterren komen het meest voor in de kern zelf van het Melkwegstelsel.
d) Populatie I sterren komen het meest voor in de halo van het Melkwegstelsel.
e) Populatie I sterren komen het meest voor in de schijf van het Melkwegstelsel.

Op galactisch niveau spreken we van twee soorten sterren: populatie I- en populatie II-sterren. Oude sterren, die voornamelijk uit waterstof en helium bestaan, noemt men populatie II-sterren. Deze sterren vindt men vooral in de bolhopen in de halo rond het sterrenstelsel. Jonge sterren bevatten chemisch zwaardere elementen. Zij zijn immers ontstaan wanneer de gas- en stofwolken waaruit ze geboren worden al 'vervuild' zijn met zwaardere elementen, afkomstig van supernovae. Deze stersoort noemt men populatie I-sterren. Ze zijn heet en helder en komen het meest voor in de schijf van het Melkwegstelsel. Sterren van populatie III hebben alleen kort na de oerknal bestaan.

26. Als gevolg van interstellair stof tussen de Aarde en een ster, lijkt het sterlicht voor ons
a) ongewijzigd in helderheid en kleur.
b) zwakker en blauwer.
c) helderder en blauwer.
d) zwakker en roder.
e) helderder en roder.

De ruimte tussen de sterren is niet helemaal leeg. Er bevinden zich talloze gas- en stofdeeltjes. Deze deeltjes noemen we interstellaire materie. Door de interstellaire materie wordt het licht van sterren in elke richting verzwakt. Dit verzwakkingsproces noemen we extinctie of interstellaire absorptie. De extinctie verschilt van plaats tot plaats. Ze is afhankelijk van de dichtheid van de gas- en stofwolken. De verzwakking van het sterlicht, dus de extinctie, is niet voor alle straling hetzelfde. Rode straling heeft minder te lijden van de extinctie dan blauwe straling. Het gevolg is dat de kleur van de ster verandert als gevolg van het stof. Dit verschijnsel noemen we interstellaire verroding.

27. Beschouw een gesloten heelal (zonder kosmologische constante), en veronderstel dat we waarnemen in een tijdperk dat de contractie van dit heelal reeds is gestart. Hoe zou het Hubblediagram (waarbij de verwijderingssnelheden van sterrenstelsels zijn uitgezet ten opzichte van hun afstanden) er dan uitzien?
a) De snelheden van de sterrenstelsels zouden globaal gezien positief zijn (wat wil zeggen dat de stelsels zich van ons verwijderen) en nog steeds evenredig met hun afstand.
b) De snelheden van de sterrenstelsels zouden positief zijn in onze nabijheid, maar negatief op grotere afstanden.
c) De snelheden van de sterrenstelsels zouden negatief zijn in onze nabijheid, maar positief op grotere afstanden.
d) De snelheden van de sterrenstelsels zouden omgekeerd evenredig zijn met hun afstand.
e) Dit valt niet te beoordelen zonder dat meer bekend is over onze plaats in het heelal.

Aangezien in dit hypothetische heelalmodel de contractie is gestart, zouden nabije sterrenstelsels ons naderen (en dus een negatieve snelheid vertonen). Verder verwijderde stelsels zullen zich daarentegen nog steeds van ons af lijken te verwijderen (met positieve snelheden), aangezien we deze stelsels waarnemen met de snelheid die ze hadden in het verleden, op het ogenblik dat de expansie van het heelal nog aan de gang was.

28. Volgens de theorie van de speciale relativiteit bestaat het concept van absolute tijd niet. De snelheid waarmee de tijd vordert voor twee klokken hangt af van de relatieve snelheid tussen deze twee klokken. Als jij één van beide klokken (klok 1) in je hand hebt en de andere klok (klok 2) beweegt aan 0,86 keer de lichtsnelheid c van je weg, hoeveel trager loopt klok 2 dan in vergelijking met klok 1?
a) Ongeveer 1 keer trager.
b) Ongeveer 2 keer trager.
c) Ongeveer 3 keer trager.
d) Ongeveer 4 keer trager.
e) Ongeveer 5 keer trager.

Dit kan berekend worden aan de hand van de formule voor de tijdsdilatatie: $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, waarbij *v* de snelheid voorstelt en *c* de lichtsnelheid. We vinden $\Delta t' \approx 1{,}96\ \Delta t$.

29. De Tully-Fisher relatie is een methode om afstanden in het heelal te bepalen. Met name volgende uitspraak is erop van toepassing:
a) De Tully-Fisher relatie wordt gebruikt om de afstand te schatten van de Cepheïde veranderlijke sterren.
b) De Tully-Fisher relatie is de beste techniek om rechtstreeks de afstand te bepalen tot de verst verwijderde sterrenstelsels.
c) De Tully-Fisher relatie maakt gebruik van de rotatiesnelheid van sterrenstelsels om de lichtkracht ervan te schatten.
d) De Tully-Fisher relatie kan alleen gebruikt worden om afstanden te bepalen tot sterren die zich relatief dichtbij bevinden.
e) De Tully-Fisher relatie maakt gebruik van de gemeten radiële snelheid van sterrenstelsels om de afstand ervan te schatten.

De Tully–Fisher relatie is een empirisch verband tussen de massa of intrinsieke helderheid van een spiraalstelsel en de rotatiesnelheid (of de breedte van de emissielijnen).

30. Welk van volgende gebeurtenissen doet zich in de geschiedenis van het heelal het eerst voor?
a) het verval van protonen.
b) de vorming van de eerste sterren en galaxieën.
c) de periode van inflatie.
d) de ontkoppeling van de vier fundamentele wisselwerkingen.
e) het ontstaan van leven op Aarde.

Als eerste wordt de zwaartekracht ontkoppeld van de andere wisselwerkingen. Daarna gebeurt dat ook met de sterke wisselwerking, ongeveer op het ogenblik dat de inflatie begint. De zwakke wisselwerking en het elektromagnetisme ontkoppelen na het einde van de inflatie.

1.	**E**	**11.**	**A**	**21.**	**C**
2.	**B**	**12.**	**E**	**22.**	**D**
3.	**B**	**13.**	**C**	**23.**	**C**
4.	**C**	**14.**	**C**	**24.**	**B**
5.	**A**	**15.**	**B**	**25.**	**E**
6.	**A**	**16.**	**C**	**26.**	**D**
7.	**E**	**17.**	**B**	**27.**	**C**
8.	**B**	**18.**	**E**	**28.**	**B**
9.	**E**	**19.**	**B**	**29.**	**C**
10.	**D**	**20.**	**C**	**30.**	**D**

Open vragenreeks I: afstandsbepalingen

Bij de vragen hieronder mag gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

$L_\odot = 3{,}8 \times 10^{26}\ W$
$1\ AE = 1{,}496 \times 10^{11}\ m$
$1\ pc = 3{,}26\ lj = 2{,}063 \times 10^{5}\ AE = 3{,}0857 \times 10^{16}\ m$
$c = 299\ 792\ 458\ m/s$
$H_0 = 73{,}8\ km/s/Mpc = 22{,}6\ km/s/Mlj$
$H_\alpha : 656{,}3\ nm$
$H_\beta : 486{,}1\ nm$

Vraag 1. (Schijnbare helderheid)
De schijnbare helderheid ℓ van een ster wordt gegeven door

$$\ell = \frac{L}{4\pi d^2}$$

waarbij L de lichtkracht van de ster en d de afstand tot de ster voorstelt.
a) Wat is de schijnbare helderheid van de Zon op Aarde?

Het invullen van de getalwaarden leidt tot volgend resultaat:

$$\ell_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi d^2} = \frac{L_\odot}{4\pi (1AE)^2} = \frac{3{,}8\times 10^{26}\ W}{4\pi (1.496\times 10^{11}\ m)^2} \approx 1351\ \frac{W}{m^2}$$

b) Wat is het maximaal vermogen dat door een zonnepaneel met een efficiëntie van 20% kan geproduceerd worden. Wanneer wordt dit maximaal vermogen gehaald?

Het maximaal vermogen kan berekend worden als

$$P = 20\% \times \ell_\odot = 270\ \frac{W}{m^2}$$

Dit piekvermogen wordt gehaald als de zonnestralen loodrecht invallen op het zonnepaneel.

c) Je meet $10^{-12} W/m^2$ als schijnbare helderheid voor een ster van hetzelfde spectrale type en dezelfde lichtkrachtklasse als de Zon. Wat is de afstand (in lichtjaar) van deze ster?

Door omvorming van de formule voor de schijnbare helderheid kan men de afstand berekenen als

$$d = \sqrt{\frac{L_\odot}{4\pi \ell_{ster}}} = \sqrt{\frac{3{,}8\times 10^{26}\ W}{4\pi\ 10^{-12}\ W/m^2}} = 5{,}5 \times 10^{18}\ m = 581\ lj$$

Vraag 2. (Roodverschuiving en wet van Hubble)
De roodverschuiving z van een object kan gedefinieerd worden aan de hand van de volgende relatie tussen de geobserveerde golflengte van een lijn in het spectrum van een object en de rustgolflengte van dezelfde lijn van een object in rust:

$$z = \frac{\lambda_{geobserveerd} - \lambda_{rust}}{\lambda_{rust}}.$$

Dit kan ook als volgt geschreven worden:

$$1 + z = \frac{\lambda_{geobserveerd}}{\lambda_{rust}}.$$

Deze waarde vertelt iets over hoeveel de golflengte uitgerekt is sinds het licht uitgezonden werd door een verafgelegen sterrenstelsel. Omdat deze uitrekking veroorzaakt wordt door de expansie van het heelal zelf, is ze ook proportioneel met de afstand tussen sterrenstelsels. Deze waarde geeft dan ook aan in welke mate de afstand tussen sterrenstelsels is toegenomen in de tijd dat het licht nodig had om ons te bereiken.
De relatie tussen deze roodverschuiving en de radiële snelheid van een sterrenstelsel ten opzichte van de waarnemer wordt gegeven door:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1+\frac{v_r}{c}}{1-\frac{v_r}{c}}}.$$

Hierin stelt v_r de radiële snelheid van het object ten opzichte van de waarnemer voor.
Verder kan de wet van Hubble-Lemaître, $v = H_0 \cdot d$, gebruikt worden om de relatie tussen de afstand d van een sterrenstelsel en de snelheid v waarmee het ten opzichte van ons weg beweegt te beschrijven.
a) Toon aan dat voor kleine roodverschuivingen, de snelheid waarmee een sterrenstelsel zich van ons verwijdert, geschreven kan worden als

$$v_r = c \cdot z.$$

Voor kleine roodverschuivingen zal de snelheid waarmee sterrenstelsels van ons weg bewegen ook klein zijn. Er geldt dus $v_r \ll c$. De vergelijking voor de roodverschuiving kan dan geschreven worden als

$$1 + z = \sqrt{\frac{1+\frac{v_r}{c}}{1-\frac{v_r}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}}\left(1 + \frac{v_r}{c}\right).$$

Voor kleine radiale snelheden is de eerste factor van het rechterlid ongeveer 1. Er geldt dus dat $z = v_r/c$ of

$$v_r = c \times z.$$

b) Beschouw twee sterrenstelsels. De Balmer alfa lijn (H_α) van het eerste sterrenstelsel wordt waargenomen op een golflengte van 662,9 nm en van het tweede op een golflengte van 1640,75 nm. De Balmer beta lijn (H_β) wordt voor deze sterrenstelsels waargenomen op 491,0 nm en 1215,25 nm, respectievelijk. Wat zijn de roodverschuivingen van beide sterrenstelsels?

Voor sterrenstelsel 1 vinden we op basis van de H_α lijn

$$z = \frac{662{,}9 - 656{,}3}{656{,}3} = 0{,}01$$

en op basis van de H_β lijn

$$z = \frac{491{,}0 - 486{,}1}{656{,}3} = 0{,}01$$

Voor sterrenstelsel 2 vinden we op basis van de H_α lijn

$$z = \frac{1640{,}75 - 656{,}3}{656{,}3} = 1{,}5$$

en op basis van de H_β lijn

$$z = \frac{1215{,}25 - 656{,}3}{656{,}3} = 1{,}5$$

c) Hoe snel bewegen beide sterrenstelsels van ons weg? Daarbij mag je veronderstellen dat de beweging gebeurt volgens de gezichtslijn.

Voor sterrenstelsel 1 geldt

$$v_r = z \times c = 0{,}01 \ \times 299792458 \frac{m}{s} \approx 2998\ km/s$$

Voor sterrenstelsel 2 geldt

$$v_r = c \times \frac{(1-z)^2 - 1}{1 + (1+z)^2} = 217091\ km/s$$

d) Hoe ver waren beide sterrenstelsels van ons verwijderd (in lichtjaar) op het moment dat de waargenomen straling uitgezonden werd?

Voor sterrenstelsel 1 geldt

$$d = \frac{v_r}{H_0} = 132\ Mlj$$

Voor sterrenstelsel 2 geldt

$$d = \frac{v_r}{H_0} = 9606\ Mlj$$

e) Hoe ver zijn beide sterrenstelsels vandaag van ons verwijderd (antwoord in lichtjaar)?

De roodverschuiving van sterrenstelsel 1 is 0,01. Dit wil zeggen dat dit sterrenstelsel vandaag 0,01+1 = 1,01 keer zover staat van ons als wanneer het licht uitgezonden werd. Dit impliceert

$$d_{vandaag} = 132 \times 1.01\ Mlj = 133\ Mlj$$

Voor sterrenstelsel 2 vinden we

$$d_{vandaag} = 9606 \times 2.5\ Mlj = 24015\ Mlj$$

f) Als je ervan uitgaat dat de expansiesnelheid van het universum steeds dezelfde was sinds het ontstaan ervan, hoe oud zou het heelal dan zijn op basis van de huidige waarde H_0 van de Hubble constante?

De leeftijd van het heelal wordt dan gegeven door (zorg dat alles in de juiste eenheden staat!)

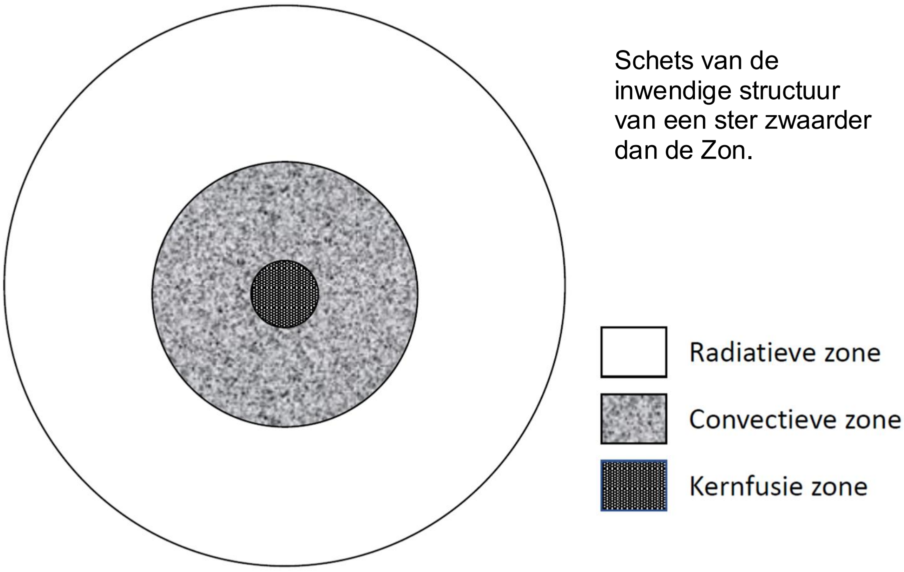
$$\frac{1}{H_0} = \frac{10^6\, jr \times 299792{,}458\ km/s}{22{,}6\ km/s} = 1.33 \times 10^{10}\ jr$$

Open vragenreeks II: sterevolutie en dubbelsterren

De straal en vooral de massa van een ster zijn enkele van de fundamentele parameters die de evolutie van een ster bepalen. Zo is de massa van een ster de bepalende factor voor het eindproduct na de dood ervan.

Vraag 1.
Leg uit welke sterrenmassa's welke eindproducten opleveren. Waarom is er telkens een grens tussen het ontstaan van een eindproduct?

Om te weten hoe lang een ster leeft, is het niet enkel belangrijk te weten hoeveel totale massa de ster heeft, maar ook hoeveel massa er beschikbaar is voor de kernfusie. Sterren zwaarder dan de Zon hebben een convectieve zone in hun centrum. Zie de figuur voor een schets van de structuur in zo'n ster. Dit betekent dat materie gemengd wordt en dus alle waterstof in de convectieve zone ter beschikking is voor de kernfusie.



Schets van de inwendige structuur van een ster zwaarder dan de Zon.

Bij $M \lesssim 9M_\odot$ ontstaat een witte dwerg; voor $9M_\odot \lesssim M \lesssim 25M_\odot$ krijgen we een neutronenster en $M \gtrsim 25M_\odot$ geeft aanleiding tot een zwart gat (met ruime speling op deze getallen). Er is een overgang tussen de verschillende eindproducten doordat er een maximum massa is van de kern van de ster (die uiteindelijk dit product vormt) die de zwaartekracht kan weerstaan. Het elektronengas in een witte dwerg kan de zwaartekracht weerstaan tot een massa van 1,5 $M_\odot$. De neutronen in een neutronenster kunnen de zwaartekracht weerstaan tot ongeveer 3 $M_\odot$.

Vraag 2.
Bereken hoeveel energie de verbranding van alle waterstof naar helium kan opleveren voor een ster met een convectieve zone. Veronderstel een ster met een massa van 2 $M_\odot$ waarbij 20% van de massa in de convectieve zone zit met een samenstelling van 75% H en 25% He.
Tip: gebruik de bekende formule $E = mc^2$ om de energie te berekenen van één reactie van 4 waterstofatomen naar 1 heliumatoom.

De massa beschikbaar voor kernfusie is

$$M_{fusie} = 0{,}2 \times 2M_\odot$$

Dus massa aan waterstof is

$$M_H = 0{,}75\ M_{fusie} = 0{,}3\ M_\odot$$

De energie per kernreactie bedraagt

$$\Delta E = \Delta mc^2 = (4m_H - m_{He})c^2 = 4{,}2855 \times 10^{-12}\ J$$

De totale energie van de kernfusie bedraagt

$$E = \frac{M_H}{4m_H} \times \Delta E = 3{,}82 \times 10^{44}\ J$$

Vraag 3.
Bereken nu hoe lang de ster kan stralen indien dit de enige bron van energie is. Gebruik dus je antwoord uit vraag 2 en veronderstel dat de ster straalt met een lichtkracht van 12 $L_\odot$.

De tijd om alle energie weg te stralen volgt uit de breuk van de nucleaire energie (in joule) en de lichtkracht (in J/s):

$$\frac{E}{L} = \frac{E}{12\ L_\odot} = \frac{3{,}82 \times 10^{44}\ J}{12 \times 3{,}8 \cdot 10^{26}\ W} = 2{,}6 \times 10^9\ \ jaar$$

Het is enorm moeilijk om parameters als straal en massa te achterhalen uit observaties. De afstand tot de ster moet goed gekend zijn of er moet gebruikgemaakt worden van technieken als asteroseismologie. Dubbelsterren bieden hier soms een oplossing voor. De dynamische beweging rond hun massacentrum geeft exact die informatie, en de meeste info wordt verkregen bij sterren die elkaar eclipseren.

Vraag 4.
De studie van een dubbelstersysteem leidt tot volgende observaties: twee sterren met dezelfde massa draaien rond hun centrum met een snelheid van 150 km/s. Ze voeren één omwenteling uit in 20 dagen. Bereken wat de massa is van de twee sterren.

Zij M is de massa van een ster, R de straal van de baan, v de snelheid en T de omwentelingsperiode. Stel de centripetale kracht gelijk aan de zwaartekracht:

$$F_c = F_g$$

dan volgt hieruit

$$\frac{Mv^2}{R} = G\frac{MM}{(2R)^2}$$

De straal R van de baan kan gehaald worden uit de omwentelingsperiode en de snelheid:

$$R = \frac{omtrek}{2\pi} = \frac{v \cdot T}{2\pi}$$

Wanneer we dit substitueren in de vorige formule bekomen we als uitdrukking voor M:

$$M = \frac{4Rv^2}{G} = \frac{2Rv^3}{\pi G}$$

Na invullen van de getalwaarden bekomen we hieruit

$$M = 5.563 \times 10^{31}\ kg = 28M_{\odot}$$

Dubbelsterren maken het plaatje van sterevolutie echter ook moeilijker. In het geval van nauwe dubbelsterren zullen de sterren op een bepaald moment massa met elkaar uitwisselen. Dit biedt het pad van evolutie enorm veel meer opties, afhankelijk van hoeveel massa is overgedragen op welk punt van de evolutie.

Vraag 5.
Door de aanwezigheid van dubbelsterren is de hemel veel rijker aan bronnen die X-stralen produceren. Dit komt niet in dezelfde mate aan bod tijdens de evolutie van een enkelvoudige ster. Verklaar waar deze X-stralen vandaan komen.

De X-stralen komen van een compacte secundaire ster in het dubbelstersysteem, zoals een witte dwerg of neutronenster. De primaire ster draagt over hieraan en de secundaire ster ontvangt deze massa in een accretieschijf. Door de sterke zwaartekracht wordt de materie erg opgewarmd, wat aanleiding geeft tot de X-stralen die geobserveerd kunnen worden.

Vraag 6.
Verklaar kort wat er kan gebeuren als een ster veel massa afstaat aan zijn partner die een witte dwerg is. Denk hierbij terug aan vraag 1.

Indien er massa op een witte ster gedumpt wordt, kan het zijn dat deze zijn massalimiet overschrijdt en instort, met een type Ia supernova tot gevolg.

Open vragenreeks III: het inwendige van planeten

In november 2018 is het ruimtetuig *InSight* op Mars geland om de interne structuur en het warmtetransport van de planeet te onderzoeken. Het is een enorme uitdaging om het inwendige van planeten of sterren te bestuderen. Slechts met een beperkt aantal technieken – zoals (astero)seismologie – zijn we hiertoe in staat. We gebruiken dus vaak theoretische modellen of onrechtstreekse observaties om meer te leren over het binnenste van planeten.

Vraag 1.
Een simpele observatie is dat de meeste hemellichamen van een redelijke grootte (diameter > 1000 km) bolvormig zijn.
a) Leg uit hoe dat komt.

Door de zwaartekracht zal elk infinitesimaal klein volume van een hemellichaam naar het massacentrum toe worden getrokken. Voor relatief lichte objecten, zoals bijvoorbeeld planetoïden of kleine maantjes, zullen de interne krachten in het materiaal ervoor zorgen dat het hemellichaam niet verder samengedrukt wordt. Ze kunnen dus een onregelmatige vorm hebben. Voor relatief zware hemellichamen wordt de eigen zwaartekracht echter zo groot dat het materiaal wordt samengedrukt totdat een bolvorm ontstaat. De zwaartekracht wordt dan tegengewerkt door een drukgradiënt. Dit noemen we hydrostatisch evenwicht.

b) Zouden er planeten kunnen bestaan die niet bolvormig zijn?

Neen, dit is niet het geval. Volgens de huidige definitie, opgesteld door de Internationale Astronomische Unie in 2006, moet een planeet in hydrostatisch evenwicht zijn, en dus bolvormig zijn.

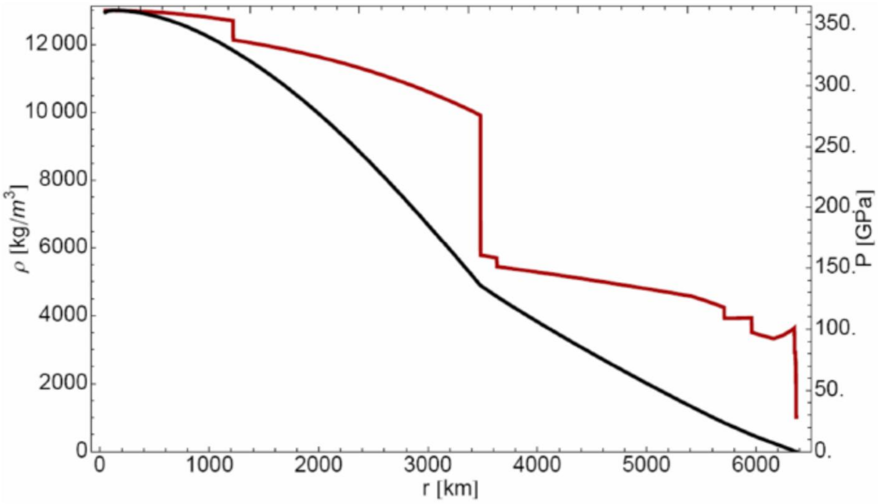
c) We proberen een vergelijking te vinden die de druk P in een rotsachtige planeet uitdrukt in functie van de afstand tot het centrum r. Als we aannemen dat de planeet perfect bolvormig is en een homogene massadichtheid heeft, kunnen we de volgende vergelijking gebruiken:

$$P = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

Hier is G de gravitatieconstante, M de massa van de planeet en R de straal van de planeet. Bereken met deze formule de druk in het centrum van de Aarde.

Voor de druk in het centrum van de Aarde stellen we r = 0. Voor de constanten nemen we $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $M_{Aarde} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg en $R_{Aarde} = 6371 \cdot 10^3$ m. Na invullen in bovenstaande formule vinden we dat $P(0) = 1{,}7 \cdot 10^{11}$ Pa. Volgens deze formule bedraagt de druk in het centrum van de Aarde dus ongeveer 200 GPa.

d) In de figuur hiernaast zie je het profiel van de druk (zwarte lijn) en massadichtheid (rode lijn) in het binnenste van de Aarde, gebaseerd op een seismologische analyse. Was je berekening nauwkeurig in het voorspellen van de druk? Waarom wel/niet?



De reële druk in het centrum van de Aarde blijkt volgens de figuur eerder 360 GPa te zijn. Het resultaat van de berekening was dus wel in de juiste grootteorde, maar toch niet heel nauwkeurig. De reden voor het verschil is dat onze aanname van een homogene massadichtheid niet correct is. Merk op dat er grote discontinuïteiten zijn waarin de massadichtheid sterk verandert, omwille van bijvoorbeeld faseovergangen in de gesteenten.

Vraag 2.
De aanname van perfect bolvormige planeten is slechts bij benadering juist. Rotatie zal ervoor zorgen dat de planeet lichtjes vervormt. Dit komt omdat de centrifugale kracht de zwaartekracht deels tegenwerkt.
a) Welke soort vervorming kan je verwachten als gevolg van rotatie?

De centrifugale kracht varieert lineair met de afstand tot de rotatieas. Er zal dus geen centrifugale kracht zijn aan de polen van de planeet en een maximale kracht aan de evenaar. Bijgevolg is de uitzetting het grootst aan de evenaar en kleiner aan de polen. De vorm die we dan krijgen wordt een oblate sferoïde genoemd.

b) Bereken de grootte van de centrifugale versnelling als gevolg van de rotatie van de Aarde voor een breedtegraad ϕ van 0° (evenaar), 45° en 90° (pool).

De grootte van de centrifugale versnelling wordt berekend met de formule $\Omega^2 d$, waarbij Ω de hoeksnelheid van de planeet is en d de loodrechte afstand tot de rotatieas. Die afstand hangt af van de breedtegraad φ en straal R volgens $d = R\cos\varphi$, dus we vinden

$$a_c = \Omega^2 R \cos\varphi$$

De hoeksnelheid van de Aarde bedraagt $7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ (oftewel $2\pi/(24 \cdot 3600\mathrm{s})$). Dit geeft dus een centrifugale versnelling van 0,034 m/s^2 op de evenaar ($\varphi = 0°$), 0,024 m/s^2 op de gemiddelde breedtegraden ($\varphi = 45°$) en 0 m/s^2 aan de polen ($\varphi = 90°$).

c) Vergelijk je antwoord met de gekende waarde van de valversnelling op Aarde. Denk je dat het effect groot of klein is? Gebruik je berekeningen om het verschil tussen de straal aan de pool en aan de evenaar te schatten.

We berekenen de procentuele bijdrage van de centrifugale versnelling door te delen door de gekende waarde van de valversnelling op aarde (9,81 m/s^2). We vinden dan een bijdrage van slechts 0,3% op de evenaar. We verwachten dus een zeer klein effect. Als we dit percentage nemen van de straal van de Aarde, vinden we een verschil van ongeveer 20 km. Dit komt inderdaad overeen met de waarneming: het verschil tussen de straal van de Aarde aan de evenaar (6378 km) en aan de polen (6357 km) bedraagt ongeveer 20 km.

d) Herhaal je berekening voor Jupiter. Verwacht je een grotere of een kleinere vervorming als gevolg van rotatie?

Jupiter heeft een rotatieperiode van ongeveer 10 uur, dus $\Omega = 1.7 \cdot 10^{-4} s^{-1}$. De maximale centrifugale versnelling is dan 2,0 m/s^2. Vergeleken met de oppervlakte zwaartekracht van Jupiter (24,8 m/s^2) is dit 8,1%. Het effect zou dus duidelijker moeten zijn dan bij de Aarde en we verwachten een straalverschil van ongeveer (0,081 · 69911 km =) 5600 km. De straal van Jupiter bedraagt 71492 km aan de evenaar en 66854 km aan de polen.

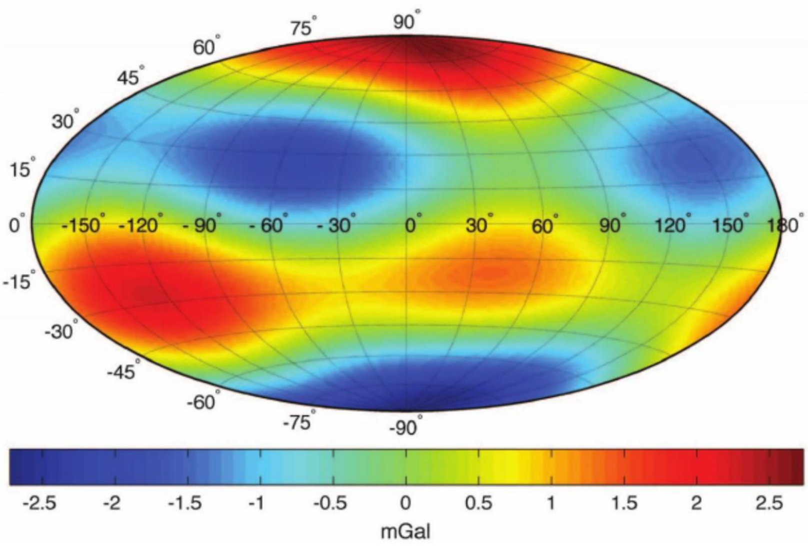
Vraag 3.

Gravimetrie, metingen van het zwaartekrachtsveld, is een vaak gebruikte techniek om het binnenste van planeten of manen te bestuderen.

a) Leg kort uit hoe gravimetrie werkt en wat het ons kan leren over de interne structuur van hemellichamen.

Een satelliet die door het veranderlijke zwaartekrachtsveld van een planeet of maan beweegt, zal zeer kleine veranderingen in zijn snelheid ondervinden. Deze veranderingen worden op de Aarde gedetecteerd in de zendfrequentie van de satelliet, door middel van het dopplereffect. Zo wordt een driedimensionaal beeld opgebouwd van het zwaartekrachtsveld. Vervolgens kan dit met een model (referentie-ellipsoïde) worden vergeleken. Waar de gemeten zwaartekracht afwijkt van het referentiemodel kan dit bijvoorbeeld duiden op topografische elementen (bergen, dalen), veranderingen in de massadichtheid (oceanische versus continentale korst) of onderaardse fenomenen (meren, vulkanisme).

b) De figuur rechts toont metingen van het zwaartekrachtsveld van Enceladus (een maan van Saturnus), gemaakt door de Cassini ruimtesonde. Opvallend is de sterke asymmetrie tussen de noordpool en de zuidpool van de maan. Hoe zou je deze zwaartekrachtanomalie kunnen verklaren?



De lage zwaartekracht aan de zuidpool zou verklaard kunnen worden door een ondergrondse oceaan die zich op de zuidkant van de maan bevindt. Deze verklaring wordt ook ondersteund door het ijzige oppervlak en het feit dat er geisers zijn waargenomen op de zuidpool van Enceladus.

c) Er bestaan sterke aanwijzingen dat Europa, de vierde maan van Jupiter, een globale ondergrondse oceaan heeft die zich onder het volledige oppervlak van de planeet bevindt. Ga er voor deze vraag vanuit dat Europa uit twee lagen bestaat: een metaal-rotsachtige mantel (ρ_{steen} = 3,8 g/cm^3) met daarbovenop een oceaanlaag (ρ_{water} = 1,0 g/cm^3). De gemiddelde massadichtheid van Europa bedraagt $\rho_{gemiddeld}$ = 3,0 g/cm^3. Bereken dan de dikte van de oceaanlaag.

We berekenen de totale massa van Europa met behulp van de gemiddelde massadichtheid $\rho_{gemiddeld}$ enerzijds, en met het tweelagenmodel anderzijds. Voor het eerste geval vinden we

$$M_{totaal} = \rho_{gemiddeld} V_{totaal} = \rho_{gemiddeld} \frac{4}{3}\pi R^3$$

Voor het model bestaande uit twee lagen, kan de totale massa geschreven worden als de som van de massa's van de beide lagen. Als we dan ook *r* definiëren als de straal waar de lagen grenzen, kunnen we de volumes van steen en water herschrijven als

$$M_{totaal} = \rho_{steen} V_{steen} + \rho_{water} V_{water}$$

of nog

$$M_{totaal} = \rho_{steen} \frac{4}{3}\pi r^3 + \rho_{water} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Als we dan de beide vergelijkingen combineren, kunnen we *r* vinden:

$$\rho_{gemiddeld} R^3 = \rho_{steen} r^3 + \rho_{water}(R^3 - r^3)$$

waaruit volgt

$$(\rho_{gemiddeld} - \rho_{water}) R^3 = (\rho_{steen} - \rho_{water}) r^3$$

zodat

$$r = \left(\frac{\rho_{gemiddeld} - \rho_{water}}{(\rho_{steen} - \rho_{water}}\right)^{\frac{1}{3}} R$$

Als dan de typische dichtheden en de straal van Europa (R = 1561 km) worden ingevuld, vinden we een grensvlak rond 1400 km. De oceaan zou dus meer dan 100 km diep kunnen zijn. Merk tot slot op dat een tweelagenmodel evenwel te simplistisch is en men beter met een drie- of vierlagenmodel werkt (kern-mantel-water-ijs).

Vraag 4.
Voor planeten en manen in ons eigen zonnestelsel kunnen in-situ waarnemingen gedaan worden. Dit is evenwel niet langer het geval voor exoplaneten, die hiervoor op een te grote afstand staan. Leg uit hoe we toch de gemiddelde massadichtheid van een exoplaneet kunnen bepalen. Welke technieken zijn hiervoor nodig?

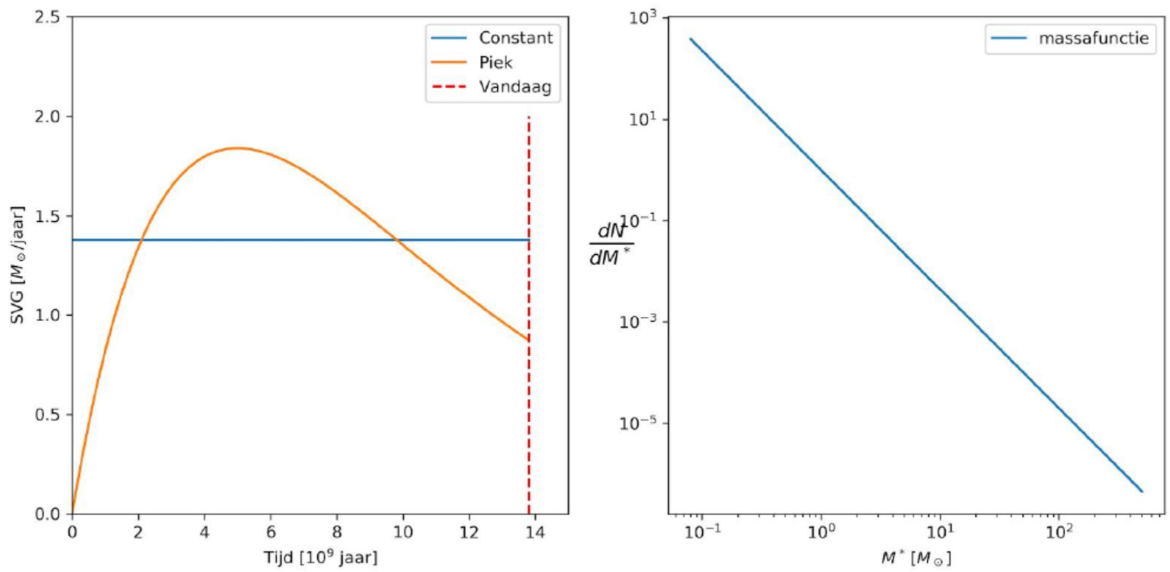
Om de gemiddelde massadichtheid te bepalen, hebben we de massa van de planeet en het volume (de straal) van de planeet nodig. De massa kan berekend worden met behulp van de radiële snelheidstechniek. Hierbij wordt het dopplereffect in het licht van de ster gemeten en worden de snelheidsoscillaties van de ster als gevolg van de planeet bepaald. De massa van de planeet kan dan worden afgeleid met behulp van de wetten van de hemelmechanica. Om de straal te bepalen wordt de transittechniek gebruikt. Hierbij passeert de planeet voor de ster en blokkeert die een deel van het sterlicht. Aangezien de hoeveelheid geblokkeerd licht overeenkomt met de oppervlakte van de projectie van de planeet op de sterschijf, kan hieruit de straal van de planeet bepaald worden.

Open vragenreeks IV: sterrenstelsels

Sterrenstelsels starten als grote wolken gas en donkere materie. Doorheen hun evolutie zetten ze dit gas om in sterren. Twee belangrijke grootheden in dit verhaal zijn de stellaire massa M^* (de totale massa in sterren), en de stervormingsgraad (SVG, de hoeveelheid massa aan sterren die per jaar gevormd wordt). M^* kan gezien worden als de integraal van SVG over een tijdsperiode. In het simpelste model voor de evolutie van een sterrenstelsel is SVG constant, en groeit de stellaire massa zo lineair doorheen tijd (blauwe lijn op onderstaande figuur links).
Een meer realistisch model gebruikt een gepiekte tijdsevolutie van SVG:

$$SVG = t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Een typische waarde voor τ = 5 miljard jaar, de tijd na de big bang waarop de stervorming piekt (oranje lijn op onderstaande figuur links).



De figuur links toont twee modellen voor de SVG van een sterrenstelsel als functie van tijd sinds de big bang. De rode lijn duidt de huidige leeftijd van het heelal aan (13,8 miljard jaar).
De figuur rechts is een voorbeeld van een Salpeter-initiële-massa functie in een log-log grafiek. $\frac{dN}{dM*}$ is het relatief aantal sterren voor een bepaalde stermassa M^*.

Vraag 1.
a) Bereken aan de hand van de bovenstaande vergelijking de totale stellaire massa die dit sterrenstelsel heeft opgebouwd tussen zijn ontstaan (t = 0) en vandaag (t =13,8 miljard jaar).

Dit resultaat kan bekomen worden door de integraal te nemen van SVG met τ = 5 tussen 0 en 13,8:

$$\int_0^{13,8} t \cdot e^{-\frac{t}{5}}\, dt = [t \cdot (-5)e^{-\frac{t}{5}}]_0^{13,8} + 5\int_0^{13,8} e^{-\frac{t}{5}}\, dt = \left[t \cdot (-5)e^{-\frac{t}{5}}\right]_0^{13,8} - \left[25e^{-\frac{t}{5}}\right]_0^{13,8}$$

zodat

$$\int_0^{13,8} t \cdot e^{-\frac{t}{5}}\, dt = -5 \cdot 13,8 \cdot e^{-\frac{13,8}{5}} - 25e^{-\frac{13,8}{5}} + 25 \approx 19,05$$

De eenheid is zonsmassa's per jaar × 1 miljard jaar. De totale massa is dus 19,05 miljard zonsmassa's.

b) Welke SVG zou dit sterrenstelsel moeten hebben om dezelfde stellaire massa te bereiken in het geval van een constante SVG?

In geval van een constante SVG deze

$$\frac{19,05 \times 10^9\ M_\odot}{13,8 \times 10^9\ jaar} = 1,38\ M_\odot/jaar$$

moeten bedragen.

c) Wat is de gemiddelde SVG over de laatste 100 miljoen jaar? Dit is een vaak gebruikte maatstaf om de huidige activiteit van sterrenstelsels te vergelijken met elkaar.

Het gemiddelde van een functie f(x) over een interval $[a, b]$ is de integraal van (1/(b-a))*f(x)dx. In dit geval bekomen we dus

$$\frac{1}{0,1}\int_{13,7}^{13,8} t \cdot e^{-\frac{t}{5}}\, dt$$

met resultaat

$$0,88\ M_\odot/jaar$$

als gemiddelde SVG in de laatste 100 miljoen jaar.

Vraag 2.
Om te weten welke soorten sterren gemaakt worden, doet men beroep op modellen voor de initiële massafunctie. Dit model geeft de kans $\frac{dN}{dM_*}$ dat een ster een massa M_* zal hebben wanneer een nieuwe ster gevormd wordt. Een veelgebruikt model voor de initiële massafunctie is dat van Salpeter:

$$\frac{dN}{dM_*} = 0{,}045 \cdot (M_*)^{-2{,}35}$$

zoals weergegeven op de figuur hierboven rechts.
a) Controleer dat de oppervlakte onder de curve van de Salpeterverdeling gelijk is aan 1 tussen 0,08 M⊙ < M_* < 500 M⊙.
Hoeveel bedraagt de oppervlakte tussen 8 M⊙ < M_* < 500 M⊙? Dit is namelijk de fractie sterren die een supernova zullen opleveren.

We berekenen

$$\int_{0{,}08}^{500} 0{,}045 \cdot (M_*)^{-2{,}35}\ dM_* = 0{,}045 \left[\frac{(M_*)^{-2{,}35+1}}{-2{,}35+1}\right]_{0{,}08}^{500} = \frac{-1}{30}\left[(M_*)^{-1{,}35}\right]_{0{,}08}^{500}$$

wat resulteert in

$$\frac{-1}{30}\left((500)^{-1{,}35} - (0{,}08)^{-1{,}35}\right) \approx 1$$

Op analoge wijze vinden we

$$\int_{8}^{500} 0{,}045 \cdot (M_*)^{-2{,}35}\ dM_* = \frac{-1}{30}\left((500)^{-1{,}35} - (8)^{-1{,}35}\right) \approx 0{,}002$$

Slechts 0.,% van de sterren eindigt als supernova.

b) Bereken de verwachte waarde voor de massa van een ster uit de Salpeterverdeling. Gebruik nu deze verwachte massa per ster en de totale stellaire massa uit vraag 1 a om het aantal sterren in het sterrenstelsel te bekomen.

De verwachtingswaarde van een verdeling $f(x)$ wordt gegeven door de integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$.
In dit geval is dat

$$\int_{0{,}08}^{500} M_* \cdot 0{,}045 \cdot (M_*)^{-2{,}35} dM_*$$

met als resultaat

$$0{,}045 \int_{0{,}08}^{500} (M_*)^{-1{,}35} dM_* = 0{,}045 \left[\frac{(M_*)^{-0{,}35}}{-0{,}35}\right]_{0{,}08}^{500} \approx 0{,}2966$$

Dit geeft 0,3 zonsmassa's als gemiddelde stermassa.
Om het aantal sterren te bekomen delen we het antwoord van vraag 1 a door dit getal:

$$\frac{19{,}05 \times 10^9\ M_\odot}{0{,}2966\ M_\odot} = 64 \cdot 10^9 \text{ sterren.}$$

Dit is het einde van de eerste ronde van
de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2019.