Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2023

Oplossingen

5 april 2023

In dit document worden oplossingen voorgesteld voor de vragen van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2022. Het spreekt voor zich dat andere methodes eventueel ook tot correcte oplossingen kunnen leiden.

Vlaamse Sterrenkunde Olympiade
Vereniging Voor Sterrenkunde
Zeeweg 96
8200 Brugge

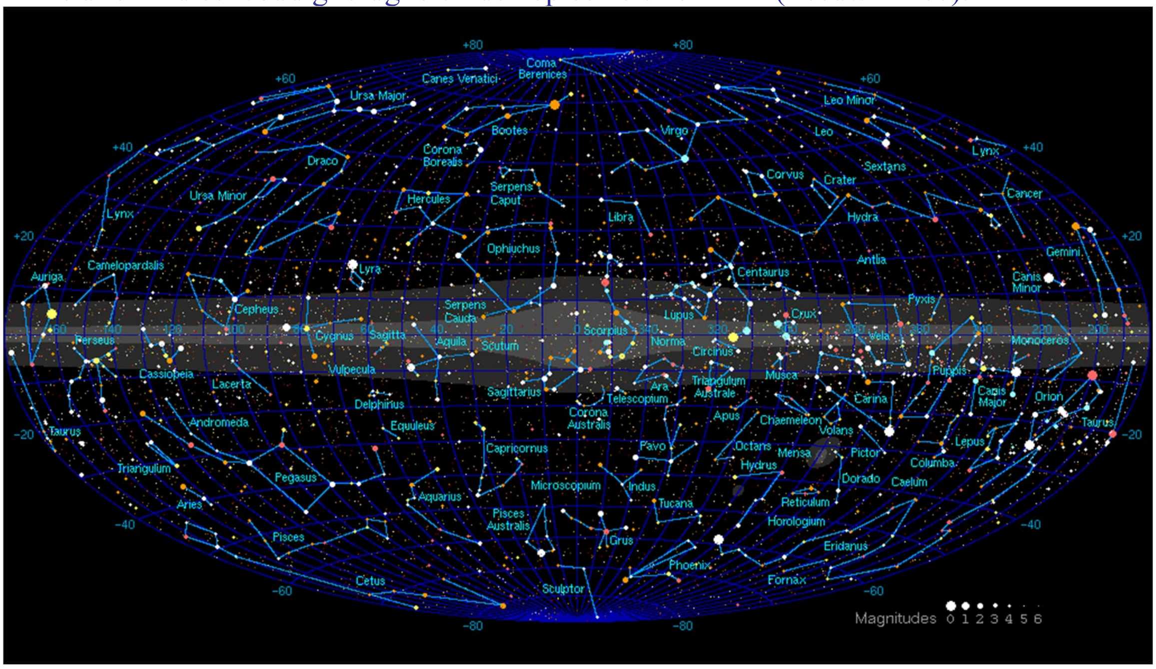
Het organiserend comité van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2023: Jelle Dhaene (Cozmix), Silke Maes (KU Leuven), Frank Tamsin (VVS), Bert Vander Meulen (UGent), Cassandra Van der Sijpt (KU Leuven).

http://www.sterrenkundeolympiade.be
info@sterrenkundeolympiade.be

Meerkeuze vragenreeks

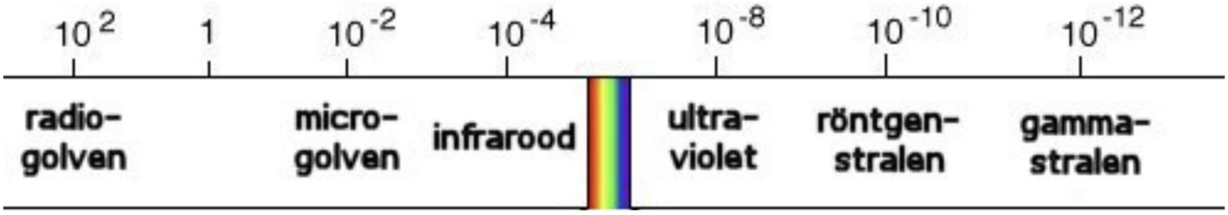
1. Welk van de volgende sterrenbeelden bevindt zich niet langs de Melkweg aan de hemel?
a) Perseus
b) Zwaan
c) Schorpioen
d) Leeuw
e) Boogschutter

Dit is uiteraard eenvoudig terug te vinden op een sterrenkaart (Leeuw = Leo).



2. Straling met een golflengte van 100 micrometer behoort tot
a) het röntgengebied.
b) het ultraviolet gebied.
c) het infrarood gebied.
d) het zichtbaar licht.
e) de radiogolven.

De verschillende golflengtegebieden zijn hieronder schematisch weergegeven (100 µm = 10^{-4} m).



3. Op de maan Titan (van Saturnus) komen veel meren voor die bestaan uit vloeibaar
a) zuurstof en stikstof.
b) stikstof en ethaan.
c) ethaan en methaan.
d) methaan en stikstof.
e) waterstof en helium.

De meren van Titan, de grootste maan van Saturnus, zijn grote hoeveelheden vloeibaar methaan en ethaan. Deze vloeistoffen zijn waargenomen door de Cassini-Huygens, maar hun bestaan was al lang voordien vermoed. Buiten kleine meren, zijn er ook grote zeeën methaan en ethaan aanwezig op Titan.

4. We doen volgende twee uitspraken:

(I) Vanaf de Aarde gezien staat Mars ongeveer één keer per 1,9 jaar in oppositie met de Zon.

(II) Vanaf de Aarde gezien staat Venus ongeveer één keer per 1,6 jaar in oppositie met de Zon.

Welke van volgende beweringen is dan correct?
a) Alleen uitspraak (I) is juist.
b) Alleen uitspraak (II) is juist.
c) Beide uitspraken zijn juist.
d) Beide uitspraken zijn onjuist.

Als de Aarde tussen een planeet en de Zon staat, spreekt men van oppositie. Een oppositie is gedefinieerd als een situatie waarin de elongatie van de Zon en de planeet gezien vanaf de Aarde 180 graden bedraagt. Dit kan alleen voorkomen voor planeten waarvan de baan verder van de Zon ligt dan die van de Aarde.
Mars komt ongeveer om de 2 jaar in oppositie te staan met de Zon. Heel logisch als je weet dat de Aarde ongeveer één jaar de tijd nodig heeft om rond de zon te draaien en Mars twee. Elke twee jaar haalt de Aarde Mars dus in op haar baan om de Zon. In werkelijkheid draaien Aarde en Mars niet exact in respectievelijk één en twee jaar om de Zon, de relatief kleine verschillen die er zijn, maken dat het eerder om 2 jaar en 2 maanden gaat.

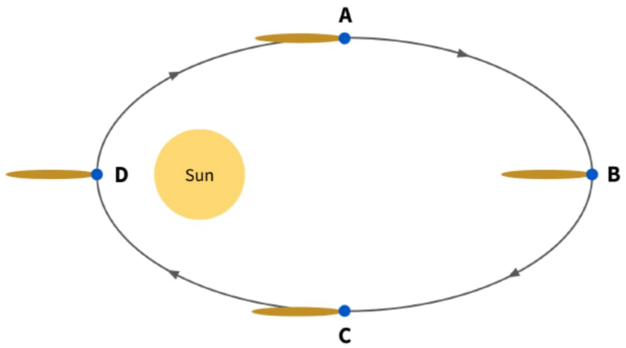
5. In een ver planetenstelsel draait een planeet om de hoofdster met een omlooptijd van 100 dagen in een baan met een halve lange as van 2 astronomische eenheden. In datzelfde planetenstelsel wordt nog een andere planeet waargenomen op een baan met een halve lange as van 8 astronomische eenheden. Hoe groot is de omlooptijd van die tweede planeet?
a) 12,5 dagen
b) 200 dagen
c) 400 dagen
d) 800 dagen
e) 1000 dagen

De derde wet van Kepler kan vanzelfsprekend ook in een andere planetenstelsel toegepast worden. We kennen de periode P_1 en de lengte a_1 van de halve lange baanas van de eerste planeet, alsook de lengte a_2 van de halve lange baanas van de tweede planeet. Dan geldt het bekende verband

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3$$

waaruit het resultaat volgt.

6. De figuur hiernaast toont schematisch een komeet in vier posities op haar baan rond de Zon. Voor welke positie wijst de staart van de komeet ongeveer in de juiste richting?
a) Positie A
b) Positie B
c) Positie C
d) Positie D
e) Voor alle aangeduide posities



Het meest opvallende onderdeel van de komeet is zijn staart (vandaar ook de volkse naam ‘staartster’). Kometen hebben meestal twee staarten. De helderste, witgele staart bestaat uit neutraal gas en stof dat het zonlicht reflecteert. De zwakkere, blauwe staart is de plasmastaart, die bestaat uit ionen (elektronisch geladen moleculen). De plasmastaart is blauw omdat de koolstofmonoxide-ionen onder invloed van het zonlicht zelf licht gaan uitstralen, vergelijkbaar met het licht uit een buislamp (die ook met ionen werkt).
De stofstaart ontstaat omdat de stralingsdruk van het zonlicht deeltjes uit de coma langzaam van de Zon wegduwt. Omdat de komeet tegelijkertijd ook rond de Zon draait, is de stofstaart meestal gebogen. De plasmastaart ontstaat omdat de zonnewind (eveneens een stroom geladen deeltjes) de tegengesteld geladen ionen in de coma met zich meevoert. Omdat de zonnewind deze ionen veel sneller afvoert dan de stralingsdruk van het zonlicht, zal de verplaatsing van de komeet rond de Zon de vorm van de plasmastaart veel minder beïnvloeden, waardoor die veel rechter en scherper afgelijnd is. De plasmastaart is altijd van de Zon af gericht.

7. Stel je voor dat je de overgangen van de Aarde door de Zon observeert vanaf een verre exoplaneet. Ervan uitgaande dat de baan van de Aarde perfect cirkelvormig is (de excentriciteit is 0) en dat de transit zich voltrekt over de volledige diameter van de Zon (de impactparameter is 0), wat is dan de duur van de transit van de Aarde?
a) 3,24 uur
b) 25,93 uur
c) 6,48 uur
d) 1,62 uur
e) 12,97 uur

Uitgaande van een cirkelvormige baan heeft de Aarde een snelheid van

$$v = 2\pi\ AE/jaar$$

Als de waarnemer ver genoeg weg is, moet de Aarde een afstand van $d = 2R_{\odot}$ afleggen.

8. Waarom signaleert de fusie van ijzer in de kern van een ster het begin van een supernova?
a) Wanneer twee ijzeratomen botsen, zullen ze fuseren tot radioactief uranium, waardoor de kern van de ster echt een enorme fusiebom wordt.
b) De fusie van ijzer maakt een enorme hoeveelheid energie vrij, waardoor de ster zichzelf opblaast.
c) Ijzer is een soort katalysator, waardoor de reacties gaan versnellen, met een explosieve vrijgave van energie tot gevolg.
d) Bij de fusie van ijzer is de ster zo heet dat ze zichzelf onmogelijk nog kan samenhouden.
e) De fusie van ijzer neemt eigenlijk energie weg uit de kern van de ster, waardoor de ster samentrekt en dan terugstuit, met een supernova-explosie tot gevolg.

In het binnenste van de ster worden uiteindelijk zware atoomkernen van ijzer gevormd, en dat zijn de meest stabiele atoomkernen die in de natuur voorkomen. Ze zullen nooit spontaan fuseren tot nog weer zwaardere elementen, en er lijkt nu echt een einde gekomen te zijn aan de kernfusiereacties in de ster. De energieproductie komt dus tot stilstand, en de ster begint onder zijn eigen gewicht ineen te storten.
In het binnenste van de ster worden de atoomkernen zo dicht op elkaar geperst, dat er uiteindelijk een supercompacte bal ontstaat die vrijwel uitsluitend uit neutronen is opgebouwd – kerndeeltjes zonder elektrische lading. Die neutronenkern heeft een middellijn van enkele tientallen kilometers, maar is een paar keer zo zwaar als de Zon. Hij laat zich niet verder samendrukken, en de buitenste gaslagen van de ster, die met hoge snelheid naar binnen vallen, komen abrupt tot stilstand op deze bolvormige ‘muur’ van neutronen. Bij die klap komt zo veel energie vrij, dat de buitenlagen van de ster vervolgens het heelal in geblazen worden. De ster spat uit elkaar in een geweldige explosie, die honderd miljard keer zo helder kan zijn als de Zon.

9.Beschouw de volgende fases in het leven van onze Zon:

(I) Heliumflits
(II) Witte dwerg
(III) Rode reuzentak
(IV) Asymptotische reuzentak
(V) Einde waterstoffusie in de kern

Rangschik deze fases chronologisch (van de eerste naar de laatste).
a) (V) – (IV) – (I) – (III) – (II)
b) (V) – (III) – (I) – (IV) – (II)
c) (I) – (V) – (III) – (IV) – (II)
d) (V) – (II) – (IV) – (I) – (III)
e) (III) – (V) – (I) – (IV) – (II)

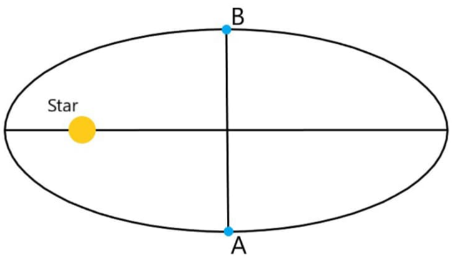
De evolutie van de Zon na de hoofdreeks begint wanneer kernfusie de waterstof in de kern uitput en een heliumkern vormt. De Zon zal dan uitdijen tot een rode reus. Uiteindelijk zal de temperatuur van de gedegenereerde heliumkern hoog genoeg worden om triple-alfa-heliumfusie te initiëren, wat leidt tot een op hol geslagen kettingreactie waarin een groot deel van de heliumkern snel wordt omgezet in koolstof. Dit staat bekend als de heliumflits. Na de heliumflits zal de Zon de horizontale tak binnengaan en vervolgens de asymptotische reuzentak in het Hertzsprung-Russell-diagram, zodra het helium in de kern is uitgeput. Ten slotte zal de Zon zijn buitenste lagen afwerpen in een planetaire nevel en de resterende blootgestelde kern zal een witte dwerg worden.

10. Welk van volgende uitspraken geldt voor supernova’s van type Ia?
a) Type Ia supernovae komen voor in binaire systemen.
b) Type Ia supernovae komen veel voor in jonge sterrenstelsels.
c) Type Ia supernovae produceren gamma-ray uitbarstingen.
d) Type Ia supernovae produceren grote hoeveelheden röntgenstraling.
e) Elk van bovenstaande uitspraken is correct.

Een supernova type Ia is een type supernova dat plaatsvindt in een dubbelstersysteem (twee sterren in omloop om elkaar), waarvan ten minste een van beide sterren een witte dwerg is. De andere ster kan verschillende objecten zijn: alles van een reuzenster tot een kleinere witte dwerg behoren tot de mogelijkheden.

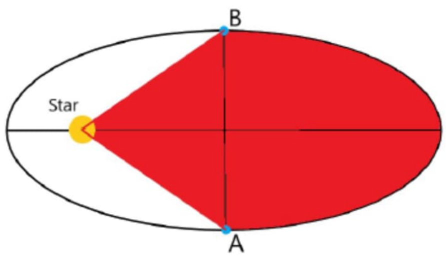
11. Op de figuur hiernaast is schematisch de elliptische baan van een komeet rond een ster weergegeven. De komeet beschrijft haar baan in tegenwijzerzin.
Welke van de volgende uitdrukkingen komt overeen met de tijd die de komeet nodig heeft om van punt A naar punt B te gaan als functie van de periode van de komeet (T) en de excentriciteit van de baan (e)?

a) $\frac{T}{2}$
b) $\boldsymbol{\left(\frac{e}{\pi}+\frac{1}{2}\right)T}$
c) $\left(\frac{1}{2}-\frac{e}{\pi}\right)T$
d) $(1+e)\frac{T}{2}$
e) $\frac{T\cdot e}{2}$



Wanneer de komeet van punt A naar punt B gaat, bestrijkt de voerstraal tussen de komeet en de Zon het rood gemarkeerde gebied in de afbeelding rechts.
Zij Δt de tijd die de komeet erover doet om van A naar B te gaan, en zij T de totale omloopperiode van de komeet rond de Zon. Dan zegt de tweede wet van Kepler dat

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{rode\ oppervlakte}{oppervlakte\ ellips}$$



Noemen we nu a de lengte van de halve lange baanas en b de lengte van de korte halve baanas, en zij verder e de excentriciteit van de ellips, dan vertaalt dit zich als

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{2\frac{ae\ b}{2}+\frac{\pi ab}{2}}{\pi\ a\ b}$$

of nog

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{aeb+\frac{\pi ab}{2}}{\pi\ a\ b}$$

zodat

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{e}{\pi}+\frac{1}{2}$$

waaruit het gevraagde volgt.

12. De resolutie θ van een ruimtetelescoop wordt theoretisch beperkt door diffractie van de hoofdspiegel. We vergelijken de diffractielimiet van de Hubble Space Telescope (HST) (primaire spiegeldiameter 2,4 m) en de James Webb Webb Space Telescope (JWST) (primaire spiegeldiameter 6,5 m). De golflengten waarop de twee telescopen hoofdzakelijk waarnemen, zijn respectievelijk 500 nm en 10 µm. Bereken de verhouding van de door diffractie beperkte hoekresolutie $\frac{\theta_{HST}}{\theta_{JWST}}$. Welke telescoop kan kleinere hoeken oplossen als hij alleen wordt beperkt door diffractie?

a) 0,014 – JWST
b) 0,14 – HST
c) 1,4 – JWST
d) 14 – HST
e) 140 – JWST

Als λ de golflengte van het licht voorstelt en D de opening van de telescoop, dan wordt de hoekresolutie θ gegeven door $\theta^{(rad)} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$.
Met behulp van de gegeven waarden krijgen we het antwoord:

$$\frac{\theta_{HST}}{\theta_{JWST}} = \frac{\frac{500\cdot 10^{-9}}{2{,}4}}{\frac{10^{-5}}{6{,}5}}$$

Daarom kan HST kleinere hoeken oplossen.

13. De excentriciteit van de baan van Pluto bedraagt $e = 0{,}25$. Schat de maximale verandering in magnitude Δm van Pluto gezien vanaf de Aarde tijdens één omloop van Pluto rond de Zon. Daarbij mag je ervan uitgaan dat de halve lange as van de baan van Pluto veel groter is dan 1 astronomische eenheid.

a) $\Delta m = 0{,}2$
b) $\Delta m = 1{,}2$
c) $\Delta m = 2{,}2$
d) $\Delta m = 3{,}2$
e) $\Delta m = 4{,}2$

De afstanden van de Zon tot Pluto en van de Aarde tot Pluto stellen we respectievelijk voor met d_{ZP} en d_{AP}. Aangezien Pluto zonlicht reflecteert, is de ontvangen flux van Pluto op Aarde van beide afstanden afhankelijk, en schaalt dus met een factor $\frac{1}{d_{ZP}^2}\frac{1}{d_{AP}^2}$. Bij benadering mogen we evenwel veronderstellen dat $d_{ZP} \approx d_{AP}$. Het verband tussen de schijnbare magnitudes m_q en m_Q van Pluto in het perihelium en in het aphelium en de overeenkomstige fluxen ℓ_q en ℓ_Q wordt weergegeven door de formule van Pogson:

$$\frac{\ell_q}{\ell_Q} = \left(\sqrt[5]{100}\right)^{m_Q - m_q}$$

Als nu q en Q de perihelium- en apheliumafstand van Pluto voorstellen, dan volgt hieruit dat

$$\Delta m = m_Q - m_q = \frac{5}{2}\log\frac{\ell_q}{\ell_Q} = \frac{5}{2}\log\left(\frac{Q}{q}\right)^4 = \frac{5}{2}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^4$$

14. We nemen spectra van drie verschillende sterren P, Q en R, met respectieve effectieve temperaturen T_P, T_Q en T_R. Daarbij blijkt dat de intensiteit van de violette kleur maximaal is in het spectrum van P, de intensiteit van de groene kleur maximaal in het spectrum van R en de intensiteit van de rode kleur maximaal is in het spectrum van Q. Welk van volgende ongelijkheden is dan correct:

a) $T_P > T_Q > T_R$
b) $T_P > T_R > T_Q$
c) $T_P < T_R < T_Q$
d) $T_P < T_Q < T_R$
e) $T_Q > T_P > T_R$

De verschuivingswet van Wien geeft aan dat de maximale golflengte van een spectrum van een zwarte straler recht evenredig is met de temperatuur van de zwarte straler.
De verschuivingswet van Wien luidt

$$\lambda_{max} \cdot T = b$$

waarbij de constante $2{,}898 \cdot 10^{-3} mK$.
Voor de golflengten geldt dat $\lambda_P < \lambda_R < \lambda_Q$.

15. Een vaak herhaald leuk weetje is dat de mens meer vermogen per volume-eenheid produceert dan sterren. Als de Zon even groot zou blijven als thans het geval is, maar dezelfde hoeveelheid energie per volume-eenheid zou produceren als een mens, wat zou dan de oppervlaktetemperatuur zijn? Daarbij mag aangenomen worden de 'gemiddelde mens' een volume heeft van 66400 kubieke centimeter en een vermogen van 100 watt.

a) 3500 K
b) 10000 K
c) 25000 K
d) 40000 K
e) 50000 K

Op basis van de opgegeven waarden is het gemiddelde vermogen per volume-eenheid van de mens

$$u = \frac{100}{66400 \cdot 10^{-6}} Wm^{-3} = 1506\, Wm^{-3}$$

Het totale vermogen van de Zon zou dan

$$L = \frac{4}{3}\pi R_\odot^3 u \qquad (1)$$

Vervolgens maken we dan gebruik van de wet van Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R_\odot^2 \sigma T^4 \qquad (2)$$

waarbij $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} de constante van Stefan-Boltzmann (of eerste stralingsconstante) is, om uit (1) en (2) de overeenkomstige temperatuur af te leiden:

$$T = \sqrt[4]{\frac{R_\odot u}{3\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{696 \cdot 10^6 \times 1506}{3 \times 5{,}67 \cdot 10^{-8}}}\ K$$

16. Bepaal het azimut van de ster Capella (met declinatie $\delta = +45°58'$, in het sterrenbeeld Auriga) wanneer de ster haar bovenculminatie bereikt op een plaats met geografische breedte $\phi = +45°58'$. We meten het azimut vanaf het noorden over het oosten.
a) 0°
b) 90°
c) 180°
d) 360°
e) onbepaald

Algemeen gesproken gebeurt de bovenculminatie van een ster op het noordelijk halfrond in het zuiden, waar het azimut 180° bedraagt. Men spreekt ook wel van meridiaandoorgang. Dit is evenwel enkel op voorwaarde dat dergelijke gebeurtenis ook plaatsgrijpt (waarvoor moet gelden dat $\delta < \phi$).
De hoogte h van een ster bij bovenculminatie bedraagt $h = 90° + \phi - \delta$ waarbij ϕ de plaatselijke breedteligging voorstelt en δ de declinatie. Voor Capella resulteert dit in een hoogte $h = 90°$, hetgeen het zenit voorstelt, waar het azimut onbepaald is.

17. Vier sterren A, B, C en D maken deel uit van dezelfde sterrenhoop. Hun absolute magnitudes bedragen respectievelijk 10, 7, –1 en –10. Welke ster lijkt dan het helderst vanop Aarde?
a) Ster A.
b) Ster B.
c) Ster C.
d) Ster D.
e) Op basis van de gegeven informatie kan dit niet bepaald worden.

Aangezien de vier sterren deel uitmaken van eenzelfde sterrenhoop mag hun verschil in afstand verwaarloosd worden. De ster die absoluut het helderst is, dan dus ook visueel het helderst zijn vanop Aarde. Dit is de ster met de kleinste magnitude.

18. Welk van volgende bekende Messier objecten is te zien in het sterrenbeeld Orion?
a) M1.
b) M8.
c) M13.
d) M27.
e) M42.

Messier 42 is de bekende Orionnevel.

19. Welk van volgende karakteristieken hebben open sterrenhopen en bolhopen met elkaar gemeen?
a) Ze zijn sterk gravitationeel gebonden.
b) Het zijn relatief jonge en actieve objecten.
c) Ze komen beide voor in spiraalstelsels.
d) Ze brengen vaak omliggend gas aan het lichten dat dan HII gebieden kan vormen.
e) Geen van bovenstaande.

Bolvormige sterrenhopen zijn nauwe groepen van honderden tot miljoenen oude sterren, die middels zwaartekracht met elkaar verbonden zijn. Open sterrenhopen bestaan daarentegen meestal uit minder dan een paar honderd sterren, zijn wat losser in samenhang en bestaan vaak uit erg jonge sterren. Open sterrenhopen raken na verloop van tijd verstoord door de zwaartekracht van moleculaire reuzenwolken tijdens hun beweging door een sterrenstelsel.

20. Welk van volgende eigenschappen is geen kenmerk van een veranderlijke ster van het Mira-type?
a) De ster vertoont intrinsieke variabiliteit.
b) De ster is aanwezig op de asymptotische reuzentak in het Hertzsprung-Russell-diagram.
c) Uiteindelijk beëindigt de ster haar leven in een supernova-explosie.
d) De amplitude van de helderheidsverandering in het infrarood bedraagt meer dan een magnitude.
e) Bovenstaande eigenschappen zijn wel degelijk allemaal kenmerken van een Mira-veranderlijke.

Mira-veranderlijken of Mira-variabelen zijn pulserende variabele sterren met een regelmatige periode tussen 80 en 1000 dagen. Ze hebben een rode kleur (een laat type spectrum). Hun amplitude is tussen 2,5 en 11 magnituden in het zichtbare licht (een factor 10 tot 1000). De bolometrische magnitude verandert slechts met een factor 2 tot 3 omdat in het nabij infrarood de variatie minder dan 2,5 magnituden is. Het zijn rode reuzen in een laat stadium van hun evolutie (op de asymptotische reuzentak in het Hertzsprung-Russell-diagram). Ze zullen binnen enkele miljoenen jaren hun circumstellaire schil afstoten als planetaire nevel en dan een witte dwerg worden.

21. Welke van de volgende beweringen is niet correct?
a) Een supernova laat een neutronenster of zwart gat achter.
b) Alleen zware sterren eindigen hun leven als supernova.
c) Een supernova geeft net zoveel licht als een heel sterrenstelsel.
d) Een supernova laat een planetaire nevel achter.
e) Bij een supernova ontstaan elementen met een atoomnummer groter dan dat van ijzer.

Een planetaire nevel is een uitdijende gasschil in de ruimte geproduceerd door sterren met een massa tussen 1 en 8 zonsmassa's aan het eind van hun leven in de reuzentak van het Hertzsprung-Russell-diagram.

22. We beschikken over een telescoop met een brandpuntsafstand van 1 meter en een oculair met een brandpuntsafstand van 20 mm. Welke vergroting wordt met deze telescoop bekomen?
a) 10 ×
b) 20 ×
c) 50 ×
d) 100 ×
e) 200 ×

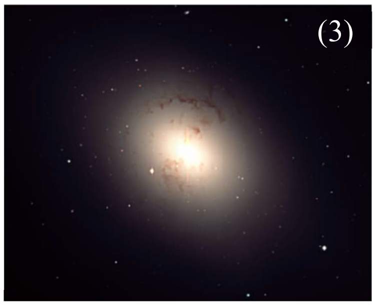
De vergroting van een telescoop wordt als volgt bepaald. Als F de brandpuntsafstand van het objectief (lens of spiegel) is, en f de brandpuntsafstand van het oculair, dan wordt de vergroting V gegeven door $V=F/f$. Aangezien we bij een telescoop meestal het oculair kunnen verwisselen, kunnen we dus met verschillende vergrotingen werken. Telescopen met grote brandpuntsafstand F laten ook grote vergrotingen toe en zijn daarom erg geschikt voor het waarnemen van details op de Maan, de planeten en in grote nevels.

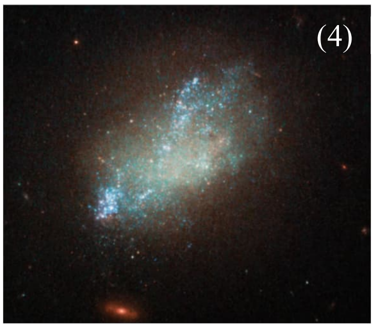
23. Welk van onderstaande stellingen komt niet overeen met de eigenschappen van een witte dwerg?
a) Het object bestaat voornamelijk uit koolstof en zuurstof.
b) Het object wordt in stand gehouden door ontaardingsdruk van de elektronen.
c) Het object is het eindstadium van sterevolutie van sterren onder de 12 zonsmassa's.
d) Het object kan nooit zwaarder worden dan 1,4 zonsmassa's.
e) Het object heeft ongeveer dezelfde straal als de Aarde.

Voordat een ster een witte dwerg wordt, zwelt ze eerst op tot een rode reus en stoot een deel van de materie af in de vorm van een planetaire nevel. De overblijvende kern (de centrale ster van de planetaire nevel) stort dan in elkaar. De witte dwerg die hierdoor ontstaat heeft een straal van enkele duizenden kilometers en een gigantische dichtheid van honderden ton per kubieke centimeter.
Van de momenteel bekende witte dwergen is de gemiddelde massa ca. 0,6 zonsmassa; de zwaarste heeft 1,33 keer de zonsmassa.
De bovengrens voor de massa van sterren die aan de basis liggen van de vorming van een witte dwerg bedraagt ongeveer 10 keer de massa van de Zon.
Hoewel men ervan uitgaat dat de meeste witte dwergen bestaan uit koolstof en zuurstof, toont spectroscopie doorgaans aan dat hun uitgezonden straling door een atmosfeer van voornamelijk waterstof of helium heen komt. Het dominante element is over het algemeen duizend keer meer aanwezig dan alle andere. Zoals gesteld door Schatzman in de jaren veertig van de twintigste eeuw, houdt men de sterke zwaartekracht aan het oppervlak verantwoordelijk voor deze puurheid en voor het scheiden van de lichtere van de zwaardere elementen, de zwaardere eronder en de lichtere erboven.
Deze atmosfeer, het enige gedeelte van de witte dwerg dat wij kunnen waarnemen, wordt verondersteld het bovenste gedeelte van een omhulsel te zijn dat een restant is van een binnenste sterrenomhulsel uit de reuzentakfase van sterevolutie, en kan ook materie uit het interstellair medium bevatten. Dit omhulsel, stelt men, bestaat uit een heliumrijke laag met een massa van niet meer dan 1% van de totale stermassa, die, als de atmosfeer hoofdzakelijk uit waterstof bestaat, erbovenop een laag rijk in waterstof heeft, die minder dan 0,01% van de stermassa

uitmaakt. Hoewel ze erg dun zijn, bepalen deze buitenste lagen de thermische evolutie van de dwerg. De gedegenereerde elektronen (ontaarde materie) die de bulk van de witte dwerg uitmaken, geleiden hitte bijzonder goed. Het overgrote deel van de massa van de witte dwerg is daardoor op dezelfde hoge temperatuur (isotherm): met oppervlaktetemperaturen tussen 8000 en 16 000 kelvin hebben deze sterren een kerntemperatuur van ongeveer vijf miljoen tot twintig miljoen kelvin. Het trage afkoelingsproces van een witte dwerg wordt veroorzaakt door de voor straling ondoordringbare aard van de buitenste lagen.

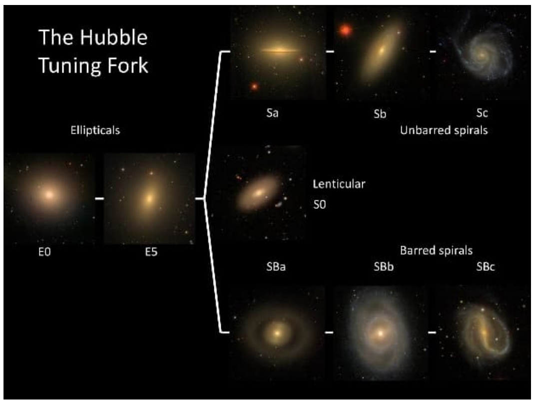
24. Classificeer de volgende sterrenstelsels volgens de classificatie van Hubble-sterrenstelsels.





a)	(1) Sb	– (2) Sc	– (3) Peculiair	– (4) E2	– (5) Onregelmatig
b)	(1) SBc	– (2) E4	– (3) Onregelmatig	– (4) Sb	– (5) Peculiair
c)	(1) E3	– (2) SBc	– (3) Sa	– (4) Peculiair	– (5) Onregelmatig
d)	(1) Sc	– (2) SBa	– (3) SBc	– (4) E2	– (5) Peculiar
e)	**(1) Sa**	**– (2) SBb**	**– (3) E3**	**– (4) Onregelmatig**	**– (5) Peculiair**

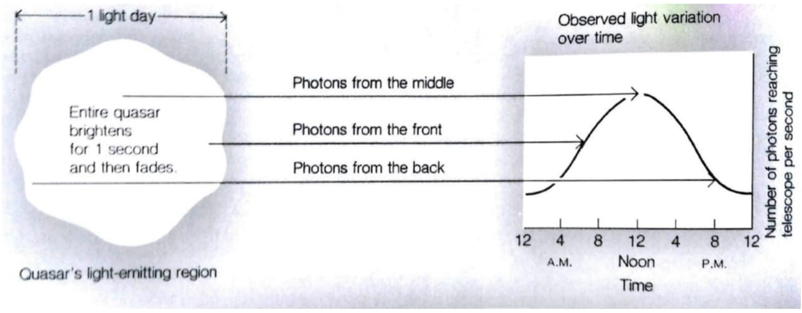
Dit valt vrij eenvoudig af te lezen uit de classificatie van Hubble.



25. Welk van de volgende zaken is een probleem van de klassieke oerknaltheorie dat wordt opgelost door de inflatietheorie?
a) Volgens de klassieke oerknaltheorie is het uiterst onwaarschijnlijk dat ons heelal thans vlak of bijna vlak zou zijn, wat nochtans wel waargenomen wordt.
b) Volgens de klassieke oerknaltheorie is het onmogelijk dat de kosmische microgolfachtergrond in thermisch evenwicht is gekomen op het moment van recombinatie, ondanks de waargenomen uniforme temperatuur.
c) De klassieke oerknaltheorie voorspelt een enorme overvloed aan magnetische monopolen, terwijl er nooit magnetische monopolen zijn ontdekt.
d) Alle bovenstaande zaken worden door de inflatietheorie afgedekt.
e) Geen enkele van bovenstaande zaken wordt door de inflatietheorie afgedekt.

Elk van (a), (b) en (c) is correct.
Antwoordkeuze (a) staat bekend als het vlakheidsprobleem. Naarmate het universum uitdijt, zal elke afwijking van vlakheid $|\Omega - 1|$ snel groeien met de tijd, volgens de Friedmann-vergelijking. Dus om het vlakke ($|\Omega - 1 < 0{,}01$) universum te hebben dat we vandaag waarnemen, moet het vroege universum extreem vlak zijn geweest (tot 18 decimalen op $t = 1$ seconde), wat een bizar fijn afgestemde begintoestand is. Inflatie zou het universum snel vlak maken en dit probleem oplossen.
Antwoordkeuze (b) staat bekend als het horizonprobleem. Tegenwoordig wordt waargenomen dat de kosmische microgolfachtergrond zeer uniform is in alle richtingen, wat impliceert dat het universum in thermisch evenwicht was bij recombinatie (toen CMB-straling vrijkwam). De conventionele oerknaltheorie voorspelt echter dat de horizonafstand veel kleiner was dan het oppervlak van de laatste verstrooiing (dit wil zeggen dat licht niet genoeg tijd zou hebben gehad om tussen tegenovergestelde punten van de CMB te reizen), dus een dergelijk thermisch evenwicht zou onmogelijk moeten zijn. Inflatie lost dit op, aangezien het mogelijk is dat het universum vóór inflatie in thermisch evenwicht is. Dan zou de snelle uitdijing door inflatie een universum creëren met een uniforme temperatuur, ongeacht de horizonafstand bij recombinatie.
Antwoordkeuze (c) is het magnetische monopoolprobleem. Grand Unified Theories voorspellen het bestaan van magnetische monopolen in het zeer vroege heelal (misschien 1 op elke kubieke horizonafstand). Niet alleen heeft niemand magnetische monopolen ontdekt, de conventionele oerknaltheorie voorspelt zelfs een overvloed aan magnetische monopolen zodanig dat de dichtheidsparameter Ω de 10^{20} zou overschrijden! Als de magnetische monopolen zich echter vóór de inflatie hadden gevormd, zou de dichtheid van de magnetische monopolen exponentieel dalen, waardoor ze vandaag de dag onmogelijk meer te detecteren zijn.
Deze drie antwoordkeuzen zijn de drie belangrijkste problemen van de conventionele oerknaltheorie, wat ertoe leidde dat kosmologen deze aanvulden met de theorie van inflatie.

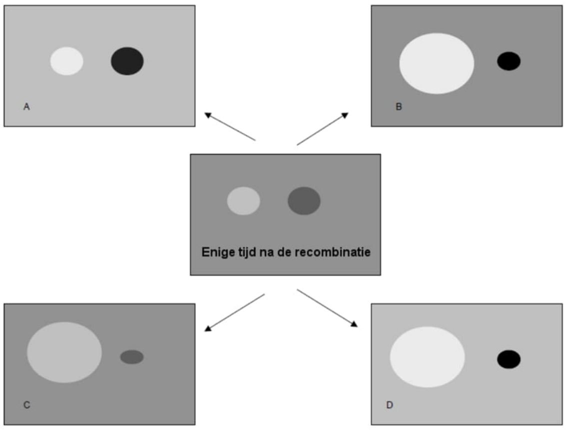
26. Op basis waarvan weten we dat quasars niet groter zijn dan het zonnestelsel?
a) Quasars zijn te lichtkrachtig om erg groot te kunnen zijn.
b) Quasars blijven er puntvormig uitzien wanneer we ze door een telescoop bekijken.
c) Quasars bevatten zwarte gaten, die zeker klein moeten zijn.
d) Quasars variëren in helderheid op tijdschalen van dagen of weken.
e) Het klopt niet: quasars zijn meestal veel groter dan het zonnestelsel.



Welke ook de bron van het licht van de quasar moge wezen, de afmetingen ervan kunnen niet groter zijn dan de tijd van de helderheidsschommelingen vermenigvuldigd met de lichtsnelheid. Immers, afhankelijk van welk deel van de bron het licht afkomstig is, neemt het een verschillende duur in beslag om ons te bereiken (zie figuur).

27. In welk gebied aan de hemel is de kosmische achtergrondstraling het helderst?
a) De kosmische achtergrondstraling is overal aan de hemel even helder.
b) In de omgeving van de Virgocluster.
c) In de omgeving van het centrum van het heelal.
d) In de omgeving van de plaats waar de Big Bang plaatsvond.
e) In de richting van het centrum van ons Melkwegstelsel.

De kosmische achtergrondstraling is isotroop.



28. Het middelste beeldje op de figuur hiernaast rechts geeft schematisch een deel van ons heelal weer een tijdje na de recombinatie (en uiteraard vereenvoudigd tot een tweedimensionale weergave). De grijstint geeft de dichtheid weer: hoe donkerder, hoe groter de dichtheid (met andere woorden het lichtgrijze gebied is wat minder dicht dan de rest van het heelal in zijn omgeving, terwijl het donkergrijze gebied net een wat grotere dichtheid heeft). Welke schematische voorstelling geeft het best weer hoe het heelal er op een later tijdstip zal uitzien?
a) Figuur A linksboven.
b) Figuur B rechtsboven.
c) Figuur C linksonder.
d) Figuur D rechtsonder.
e) Elk van de vier weergegeven situaties is even waarschijnlijk.

De gemiddelde (achtergrond)dichtheid zal met de tijd afnemen. Dit elimineert B en C die dezelfde achtergronddichtheid hebben. De lichtgrijze ellips (die een gebied met lagere dichtheid voorstelt) zal groeien en minder dicht worden, terwijl de donkergrijze ellips (die een gebied met hogere dichtheid voorstelt) zal krimpen en dichter zal worden. Het is dus D.

29. Welk van volgende uitspraken over de botsing van sterrenstelsels is correct?
a) Botsingen tussen sterrenstelsels komen vrijwel nooit voor, omdat sterrenstelsels zich net als sterren veel te ver van elkaar bevinden, in vergelijking met hun afmetingen.
b) Botsingen tussen sterrenstelsels zorgen ervoor dat grote aantallen sterren botsen en exploderen.
c) Botsingen tussen sterrenstelsels doen deze sterrenstelsels ineenvallen tot superzware zwarte gaten.
d) Botsingen tussen sterrenstelsels zorgen ervoor dat elliptische stelsels overgaan in spiraalstelsels.
e) Botsingen tussen sterrenstelsels veroorzaken uitbarstingen van stervorming.

Botsingen tussen sterrenstelsels komen geregeld voor. Daarbij doen zich vrijwel geen botsingen tussen individuele sterren voor. Botsingen van gaswolken zorgen wel voor golven van stervorming.

30. Wat is de beste benadering voor de diameter van het waarneembare heelal (uitgedrukt in parsec)?
a) 13 miljard parsec
b) 29 miljard parsec
c) 36 miljard parsec
d) 55 miljard parsec
e) 93 miljard parsec

Het waarneembaar heelal is dat gedeelte van het universum waarvan het in theorie mogelijk is het vanaf de Aarde waar te nemen.
In de veronderstelling dat het heelal op grote schaal een isotrope structuur heeft, heeft het waarneembaar heelal de vorm van een bol met in het centrum de Aarde (of op welke plaats de waarnemer zich ook bevindt). Men geeft dan als straal ongeveer 46,5 miljard lichtjaar. Het heelal zelf wordt slechts op 13,75 miljard jaar oud geschat. De reden dat de geschatte straal groter is dan het licht in die tijd kan afleggen, is de expansie van het heelal. Men ziet bijvoorbeeld op Aarde het licht van een sterrenstelsel dat op 46,5 miljard lichtjaar afstand ligt. Toen dit licht werd uitgezonden, lag dit sterrenstelsel veel dichter bij het Melkwegstelsel, nu ligt het verder weg door de uitdijing van het heelal. Het licht had daardoor maar 13,75 miljard jaar nodig om ons te bereiken, ook al ligt dit sterrenstelsel nu veel verder dan 13,75 miljard lichtjaar. Men geeft dus over het algemeen als straal van het waarneembaar heelal die afstand die de verst weg gelegen waarneembare objecten nu van ons af liggen, ook al zien we deze objecten wel zoals ze waren toen ze nog veel dichterbij lagen.
De omrekening kan gebeuren op basis van het feit dat een parsec ongeveer 3,26 lichtjaar is.

1.	D
2.	C
3.	C
4.	D
5.	D
6.	D
7.	E
8.	E
9.	B
10.	A

11.	B
12.	B
13.	C
14.	B
15.	E
16.	E
17.	D
18.	E
19.	C
20.	C

21.	D
22.	C
23.	C
24.	E
25.	D
26.	D
27.	A
28.	D
29.	E
30.	B

Open vragenreeks I: (exo)planeten rond hun ster

Bij de vragen hieronder kan gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

Lichtkracht van de Zon: $\mathrm{L_{zon}} = \mathrm{L}_\odot = 4 \times 10^{26}\ \mathrm{W}$

Constante van Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$

Astronomische eenheid: $1\ AE = 1{,}5 \times 10^{11}\ m$

Men weet al sinds de oudheid dat er zich in de buurt van de Zon nog andere planeten dan de Aarde bevinden. Toch heeft het tot in de jaren '90 van vorige eeuw geduurd voordat er planeten ontdekt zijn die zich in een baan rond andere sterren bevinden, zogenaamde exoplaneten. De eerste exoplaneet die men ontdekte, was een grote, Jupiter-achtige planeet dichtbij zijn ster, wat we nu een ‘hete Jupiter’ noemen. Zulke ontdekkingen, waar al lang over gespeculeerd werd, brachten een hele hoop vragen met zich mee en zorgden voor een nieuwe tak in de sterrenkunde. Ook vandaag nog, met gloednieuwe instrumenten zoals de James Webb Space Telescope, worden nog vele andere werelden ontdekt[1].

Gebruik voor het antwoord op onderstaande vragen telkens de wetenschappelijke notatie met 4 beduidende cijfers.

Vraag 1: detecteren van exoplaneten.
Het is niet gemakkelijk om exoplaneten te detecteren in observaties omwille van verschillende redenen. Toch zijn wetenschappers vindingrijk geweest.

a) Geef de twee hoofdredenen die het wetenschappers moeilijk maken om exoplaneten te detecteren.

Planeten hebben een hele zwakke helderheid in vergelijking met hun ster, wel miljarden keren zwakker. Zelfs als een planeet zich ergens alleen zou bevinden, zou het heel moeilijk zijn deze te observeren. Daarnaast staan deze zwakke planeten nog eens langs een ontzettend heldere lichtbron, wat de detectie alleen nog maar bemoeilijkt. Vaak wordt vergeleken met het zoeken naar een vuurvliegje vlakbij een vuurtoren.

[1] Een leuke animatie over waar en hoeveel exoplaneten er de afgelopen 30 jaar ontdekt zijn, is te vinden op *https://en.wikipedia.org/wiki/Discoveries_of_exoplanets#/media/File:Exoplanets5000mark.gif*

b) Geef drie succesvolle detectiemethoden. Voor elk van deze drie technieken, leg kort uit
(i) hoe ze werken en op welke fysica ze steunen,
(ii) welke soort exoplaneten het gemakkelijkst gevonden worden met deze techniek en
(iii) welke grootheid/grootheden (zoals massa, straal, etc.) van de planeet ermee bepaald kan/kunnen worden.

- Transit/transitie: Bij deze methode gebruiken wetenschappers de lichtkracht van de ster. Als een planeet voor de ster passeert, zal de lichtkracht van de ster afnemen, omdat de planeet een deeltje van het licht blokkeert. Door nauwkeurig de lichtkracht van sterren in functie van de tijd te meten, kunnen kleine dipjes gedetecteerd worden. Hoe dichter en hoe groter de planeet, hoe dieper de dip. Bijgevolg worden met deze techniek het gemakkelijkst de hete Jupiters gevonden. De transitiemethode kent twee grote nadelen, namelijk (i) de planeet moet in het zicht van de waarnemer passeren voor de ster, en (ii) de methode zorgt voor veel vals-positieve waarnemingen van exoplaneten. Een extra check is dus nodig om helemaal zeker te zijn. Het grote voordeel aan deze methode is wel dat, eens een exoplaneet bevestigd is, de grootte kan bepaald worden, en ook de samenstelling van de atmosfeer van de planeet kan worden onderzocht.
- Radiële snelheid: Deze methode steunt op het dopplereffect. Als gevolg van de wetten van Kepler, zal de aanwezigheid van een planeet rond een ster ervoor zorgen dat de ster een klein beetje waggelt. Vanop de Aarde zien we dit als een verschil in snelheid van de ster; op bepaalde momenten zal de ster naar ons toe bewegen en op andere momenten van ons weg. Net zoals het geluid van een ambulance van toon verandert door het dopplereffect, zal het licht, uitgestraald door de ster, ook meer naar het rode (van ons weg bewegen) of meer naar het blauwe (naar ons toe bewegen) verschuiven. Deze variatie in golflengte kunnen we meten via spectroscopie en zo exoplaneten detecteren. Ook deze methode werkt het best bij zware planeten dichtbij hun ster, liefst nog bij een ster van lage massa, omdat in dat geval de ster harder zal waggelen. Via deze methode kan de excentriciteit van de baan van de planeet bepaald worden en ook een afschatting van de massa van de planeet. Helaas is de observatie van meerdere planeten rond eenzelfde ster nodig om de exacte massa te bepalen.
- Directe waarneming: Onder ideale omstandigheden, kunnen planeten ook gedetecteerd worden door ze letterlijk te observeren in een directe waarneming. Bij deze methode wordt een coronagraaf gebruikt die het licht van de ster zo veel mogelijk blokkeert, zodat de planeten zichtbaar worden. Massieve hete sterren die ver weg staan van hun, liefst koele, ster worden het gemakkelijkste waargenomen met deze techniek. Bij deze techniek kan een ruwe afschatting van de massa gemaakt worden, maar dit is minder betrouwbaar dan bij de radiële snelheid methode.
- Gravitationele mircolensing: De algemene relativiteitstheorie van Einstein voorspelt dat massa licht kan afbuigen. Bijgevolg kan een massief object gebruikt worden als een lens, die de lichtbron kan vergroten of verkleinen. Als twee sterren perfect op één lijn staan met de Aarde en de dichtstbijzijnde ster heeft planeten, dan zal dat systeem (ster + planeten) het licht van de achterste ster vervormen. Even later, als de sterren niet meer mooi op één lijn staan, zal het licht weer onvervormd waargenomen worden. Door het verschil te monitoren, kunnen exoplaneten ontdekt worden en kan de massa nauwkeurig bepaald worden. De methode is het krachtigste voor planeten met kleine massa, omdat de microlensing dan het meest nauwkeurig is.

Vraag 2: leefbare zone.
Een tweede luik dat open is gegaan toen de eerste exoplaneten ontdekt werden, is de vraag of we alleen zijn in dit immens grote heelal. Door te bestuderen hoe het leven op Aarde werkt en ontstaan is, proberen wetenschappers te achterhalen of andere exoplaneten al dan niet geschikt zijn voor leven. Eén van de parameters die gebruikt wordt voor een eerste indicatie, is de zogenaamde 'leefbare zone'.

a) Leg in je eigen woorden uit wat de 'leefbare zone' van een ster is en hoe deze gedefinieerd wordt.

Vloeibaar water ligt aan de basis van het leven op Aarde. Wetenschappers gaan er in de eerste plaats van uit dat deze molecule dus noodzakelijk is om leven mogelijk te maken. De leefbare zone beschrijft doorgaans de zone rond een ster waar water vloeibaar is door de warmte die de ster uitstraalt. Natuurlijk zijn er nog vele andere parameters die exact juist moeten zijn om water vloeibaar te maken. Zo kan de invloed van een atmosfeer rond een planeet (aan de hand van de samenstelling) mee bepalen of water al dan niet vloeibaar is. Ook voor andere moleculen kan een leefbare zone bepaald worden.

b) We nemen aan dat een ster straalt als een zwarte straler, en dat een planeet op een afstand d van deze ster een flux $f_\star$ aan straling ontvangt gelijk aan

$$f_\star = \frac{L_\star}{4\,\pi\,d^2}$$

waarbij $L_\star$ de lichtkracht van de ster is.
Als de planeet het ontvangen licht ook weer uitstraalt als een zwarte straler, toon dan aan dat de temperatuur aan het oppervlak van de planeet door de straling van de ster gegeven wordt door

$$T_{eff,p} = \left(\frac{L_\star}{16\,\pi\,\sigma\,d^2}\right)^{1/4}$$

Je mag daarbij ook aannemen dat het beschenen deel van de planeet perfect cirkelvormig is.

Gegeven is de schijnbare flux van de ster dat een planeet op afstand d ontvangt. Via deze flux, kunnen we de lichtkracht L bepalen die de planeet ontvangt, want $L = Af$, met A de oppervlakte van het beschenen object en f de flux. In dit geval is bekend dat het oppervlak cirkelvormig is, dus $A = \pi R_p^2$, waarbij R_p de straal van de planeet voorstelt. De schijnbare lichtkracht is dus

$$\ell(d) = \frac{L_\star}{4\,\pi\,d^2}\pi R_p^2$$

De planeet mag hier ook beschouwd worden als zwarte straler, die al het inkomende licht terug uitzendt. Met de wet van Stefan-Boltzmann vinden we dan de lichtkracht van de planeet:

$$L_p = 4\pi\sigma R_p^2 T_{eff,p}^4$$

Hier is σ de Stefan-Boltzmann constante en stelt $T_{eff,p}$ de oppervlakte (of effectieve) temperatuur van de planeet. Om de planeet in thermisch evenwicht te houden, is vereist dat

$$L_p = \ell(d)$$

Aan de hand van voorgaande vergelijkingen volgt hieruit dat

$$T_{eff,p}^4 = \frac{L_\star}{16\,\pi\,\sigma\,d^2}$$

wat meteen leidt tot het gevraagde resultaat.

c) Water vormt de basis van het leven hier op Aarde. Gebruik de formule van de vorige deelvraag (b) om te bepalen waar de leefbare zone rond de Zon zich situeert voor deze molecule. Geef de locatie van de leefbare zone in de eenheid AE (astronomisch eenheid).

De leefbare zone van een ster hangt enkel en alleen af van de lichtkracht van de ster, dat is wat voorgaande vergelijking ons vertelt. We kunnen deze vergelijking dan herschrijven als

$$d = \sqrt{\frac{L_\star}{16\,\pi\,\sigma\,T^4}}$$

Om de leefbare zone van water te bepalen, vullen we de smelttemperatuur (0°C = 273 K) en de kooktemperatuur (100°C = 373 K) van water in:

$$d_{inner}(373K) = \sqrt{\frac{L_\odot}{16\,\pi\,\sigma\,T^4}} = \sqrt{\frac{4\times10^{26}\ \mathrm{W}}{16\,\pi\,\sigma\,(373\ K)^4}} = 8{,}51 \times 10^{10}\ m = 0{,}57\ AE$$

$$d_{outer}(273K) = \sqrt{\frac{L_\odot}{16\,\pi\,\sigma\,T^4}} = \sqrt{\frac{4\times10^{26}\ \mathrm{W}}{16\,\pi\,\sigma\,(273\ K)^4}} = 1{,}59 \times 10^{11}\ m = 1{,}06\ AE$$

De leefbare zone ligt voor water tussen 0,57 en 1,06 AE van de Zon verwijderd. De Aarde bevindt zich in deze zone.

d) Stel dat we ook op zoek gaan naar een andere vorm van leven, gebaseerd op ammoniak, bevindt de leefbare zone zich dan doorgaans dichter of verder van de ster?
Op welke planeet in ons zonnestelsel zou dit soort leven mogelijk zijn, op basis van de locatie van de leefbare zone?

De smelt- en kooktemperatuur van ammoniak liggen veel lager dan die van water (195,42 K en 239,81 K, respectievelijk). Daarom zal de leefbare zone voor leven gebaseerd op ammoniak ook veel verder weg liggen van de ster. We gebruiken opnieuw dezelfde formule om de locaties te bepalen:

$$d_{inner}(239{,}81K) = \sqrt{\frac{L_\odot}{16\,\pi\,\sigma\,T^4}} = \sqrt{\frac{4\times10^{26}\ \mathrm{W}}{16\,\pi\,\sigma\,(239{,}81\ K)^4}} = 2{,}06 \times 10^{11}\ m = 1{,}4\ AE$$

$$d_{outer}(195{,}42K) = \sqrt{\frac{L_\odot}{16\,\pi\,\sigma\,T^4}} = \sqrt{\frac{4\times10^{26}\ \mathrm{W}}{16\,\pi\,\sigma\,(195{,}42\ K)^4}} = 3{,}10 \times 10^{11}\ m = 2{,}1\ AE$$

In het geval van het zonnestelsel bevindt Mars zich ongeveer in de leefbare zone van ammoniak.

e) De positie van de leefbare zone rond een ster is niet constant in de tijd. Wat gebeurt er met de leefbare zone rond een ster wanneer deze ster verder evolueert en een rode reus wordt?

Zolang sterren zich op de hoofdreeks bevinden, nemen hun helderheid en lichtkracht geleidelijk aan toe. Dit zal ervoor zorgen dat de leefbare zone van een ster zich er steeds verder van verwijdert. Rode reuzen hebben een lichtkracht die tot 1000 keer groter is dan die van de Zon. Wanneer een ster deze levensfase bereikt, zullen de dichtstbijzijnde planeten verschroeid worden en zal de leefbare zone zich veel verder van de ster bevinden. Eenmaal de Zon deze fase bereikt, zal haar straal tot 100 keer toenemen en zal ze een oppervlaktetemperatuur hebben rond de 4000 K. De leefbare zone voor op water gebaseerd leven zal zich dan op een afstand van zowat 28 AE bevinden. Dit is ongeveer de afstand waarop de planeet Uranus zich momenteel bevindt.

Open vragenreeks II: de wet van Hubble-Lemaître

Bij de vragen hieronder kan gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

Lichtsnelheid: $c = 299792458\,\mathrm{m/s}$

Parsec: $1\,pc = 3{,}08567758 \times 10^{13}\,km$

In 1929 slaagde Edwin Hubble erin de afstanden en de snelheden van 24 extragalactische ‘nebulae’ te schatten. Hij stelde zijn resultaten grafisch voor en vond een nagenoeg lineair verband tussen de radiële snelheid van de nebulae en de afstand ervan tot de Aarde. Dit verband is vandaag de dag gekend als de Wet van Hubble-Lemaître en deze wordt genoteerd als

$$v_r = H_0 D \qquad (1)$$

voor een sterrenstelsel met radiële snelheid v_r en afstand D. De constante H_0 noemen we de ‘Hubbleconstante’. Deze constante karakteriseert dus de expansie van het universum. Het bepalen van de exacte waarde van de Hubbleconstante blijft tot op de dag van vandaag nog steeds een lastige taak. Er zijn immers meerdere manieren om H_0 te bepalen. Eén van deze methodes is simpelweg de werkwijze die Edwin Hubble zelf toepaste: bepaal de afstanden en de snelheden van voldoende verafgelegen astronomische objecten en bereken met die data de beste waarde voor H_0. Deze methode baseert zich op de eigenschappen van astronomische objecten in de huidige staat van ons universum en men bestempelt deze metingen ook wel als metingen uit het ‘late universum’. De laatste jaren is er ook een andere methode op de voorgrond getreden. De lancering van de Planck satelliet heeft fysici in staat gesteld de kosmische achtergrondstraling erg nauwkeurig te meten. Deze kosmische achtergrondstraling is een overblijfsel van de oerknal en observaties tonen kleine fluctuaties in de temperatuur van de straling. Deze fluctuaties bevatten veel informatie over de eigenschappen van het universum, waaronder ook de Hubbleconstante. Bij deze methode wordt de Hubbleconstante dus bepaald door middel van metingen uit het ‘vroege universum’.

In 2021 kwamen er nieuwe rapporten uit in verband met de ‘Hubblespanning’. De naam ‘Hubblespanning’ verwijst naar het verschil tussen de gevonden waarde voor de Hubbleconstante door metingen uit het late universum en de gevonden waarde door metingen uit het vroege universum. Volgens het ‘late universum’-kamp heeft de Hubbleconstante een waarde

$$H_0 = 73\,\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$$

terwijl het ‘vroege universum’-kamp een waarde

$$H_0 = 67{,}7\,\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$$

bekomt.

Vorig jaar werd de statistische significantie door middel van nauwkeurigere metingen verder vergroot. Dit was erg spannend nieuws aangezien dit lijkt te betekenen dat er iets fundamenteel incorrect is aan (minstens) één van de methoden voor de bepaling van de Hubbleconstante. Dit wijst op nieuwe fysica die ontdekt moet worden!

Vraag 1.
In deze vraag treden we in de voetsporen van Edwin Hubble en maken we een schatting voor de Hubbleconstante.
De radiële snelheid van een sterrenstelsel wordt bepaald aan de hand van zijn dopplerverschuiving z. De dopplerverschuiving van een spectrale lijn met rustgolflengte λ_0 en geobserveerde golflengte λ_{obs} wordt gegeven door

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_0}{\lambda_0} \qquad (2)$$

Deze dopplerverschuiving kan ook geschreven worden als functie van de radiële snelheid v_r van de straler:

$$z = \sqrt{\frac{1+\frac{v_r}{c}}{1-\frac{v_r}{c}}} - 1 \qquad (3)$$

a) Toon aan dat voor kleine, niet-relativistische snelheden de dopplerverschuiving kan uitgedrukt worden als

$$z \approx \frac{v_r}{c}$$

De aanname dat de snelheid klein en niet-relativistisch is, betekent concreet dat $v_r \ll c$. We kunnen z dan herschrijven als

$$z = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{v_r}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v_r}{c}\right)\left(1+\frac{v_r}{c}\right)}} - 1 = \frac{1+\frac{v_r}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_r}{c}\right)^2}} - 1$$

Aangezien $\frac{v_r}{c} \ll 1$ weten we dat $\left(\frac{v_r}{c}\right)^2 < \frac{v_r}{c}$ en bijgevolg kunnen we de kwadratische term inde noemer verwaarlozen ten opzichte van de lineaire term in de teller, hetgeen eigenlijk wil zeggen dat de noemer ongeveer gelijk is aan 1. Dit geeft dan

$$z \approx 1 + \frac{v_r}{c} - 1$$

zodat

$$v_r \approx zc$$

b) De lijnen in het spectrum van een sterrenstelsel kunnen ofwel een ‘roodverschuiving’ ofwel een ‘blauwverschuiving’ ondergaan. Wat besluit je over de beweging van het sterrenstelsel voor elk fenomeen?
Welk fenomeen observeren we bij de meeste sterrenstelsels in het universum en waarom?

Roodverschuiving betekent dat de geobserveerde lijn richting de rode kant van het spectrum is geschoven, oftewel richting grotere golflengtes. Concreet betekent dit dus dat $\lambda_{obs} > \lambda_0$ waardoor $z > 0$. Uit (3) vinden we dan dat

$$\sqrt{\frac{1+\frac{v_r}{c}}{1-\frac{v_r}{c}}} > 1$$

wat het geval is voor $v_r > 0$. Dit betekent dat objecten die van ons weg bewegen een roodverschuiving vertonen. Het tegenovergestelde geldt voor blauwverschuiving. Objecten die een blauwverschuiving vertonen, bewegen naar ons toe. Aangezien het universum expandeert, verwachten we dat sterrenstelsels zich van ons weg bewegen en deze sterrenstelsels zullen dus een roodverschuiving vertonen.

c) Zoals bij de vorige deelvraag (b) reeds aangegeven, vertonen quasi alle sterrenstelsels eenzelfde soort dopplerverschuiving door de expansie van het heelal. Toch zijn er enkele sterrenstelsels die afwijken van de norm. Geef een voorbeeld van zo een sterrenstelsel. Hoe kan dit verklaard worden?

Het Andromedastelsel is het bekendste voorbeeld van een sterrenstelsel dat een blauwverschuiving vertoont. Dit betekent dat het Andromedastelsel naar ons toe beweegt, wat in contradictie lijkt te zijn met de expansie van het universum. De verklaring hiervoor is dat het Andromedastelsel zich erg dichtbij het Melkwegstelsel bevindt, waardoor de expansiesnelheid – die lineair afhankelijk is van de afstand – niet de dominerende snelheidscomponent is. In plaats daarvan zien we de bewegingen van het stelsel ten opzichte van het vacuüm rondom. De expansiesnelheid die men berekent met de wet van Hubble-Lemaître zal enkel exact overeenkomen met de waargenomen snelheid voor objecten die volledig in rust zijn ten opzichte van het vacuüm rondom. Dit is niet realistisch aangezien alle astronomische objecten een bepaalde intrinsieke beweging ondervinden. Toch observeren we voor de meeste sterrenstelsels een roodverschuiving omdat in het merendeel van de gevallen de expansiesnelheid de grootste snelheidscomponent is, zeker naarmate de afstand groter wordt.

Vraag 2.
Cygnus A is een radio-sterrenstelsel met een dopplerverschuiving van $z = 0{,}056075$ en het stelsel bevindt zich op een afstand van 232 Mpc.

a) Wat is de geobserveerde golflengte van de Hα-lijn in het spectrum van Cygnus A? Druk je antwoord uit in nanometer.

De rustgolflengte voor de Hα-lijn is $\lambda_0 = 656{,}46$ nm. De geobserveerde golflengte wordt gegeven door

$$\lambda_{obs} = \lambda_0(z+1)$$

Aldus vinden we voor Cygnus A dat de geobserveerde golflengte van de Hα-lijn gelijk is aan $\lambda_{obs} = 693{,}27$ nm.

b) Gebruik de gegevens van Cygnus A om de waarde van de Hubbleconstante H_0 te schatten. Druk je antwoord uit in km · s^{-1} · Mpc^{-1}.

Aangezien $z \ll 1$ voor Cygnus A, kunnen we gebruikmaken van de benadering $v_r \approx zc$. Dan vinden we dat Cygnus A beweegt met een snelheid

$$v_r \approx 0{,}056075 \times 299792{,}458\,\text{km/s} = 16810{,}862\,\text{km/s}$$

Nu kunnen we gebruikenmaken van de wet van Hubble-Lemaître:

$$H_0 = \frac{v_r}{D} = \frac{16810{,}862\ \text{km/s}}{232\ \text{Mpc}} \approx 72\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

c) Vertrekkende van de wet van Hubble-Lemaître, vind een wiskundige uitdrukking voor de evolutie van de afstand D van een sterrenstelsel als functie van de tijd t na de oerknal, de huidige afstand D_0 en de huidige leeftijd t_0 van het universum. Je mag daarbij aannemen dat de Hubbleconstante doorheen de tijd niet veranderd is.

De snelheid van een object is de afgeleide van de positie naar de tijd. Bijgevolg kan de wet van Hubble-Lemaître geschreven worden als een differentiaalvergelijking:

$$\frac{dD(t)}{dt} = H_0 D(t)$$

Herschrijven van deze vergelijking levert

$$\frac{dD}{D} = H_0 dt$$

We kunnen nu het linkerlid integreren van de huidige afstand D_0 tot een willekeurige afstand D_* en het rechterlid van de huidige tijd t_0 tot de tijd t_* waarop de afstand gelijk is aan D_*.

$$\int_{D_0}^{D_*} \frac{dD}{D} = \int_{t_0}^{t_*} H_0 dt$$

Hieruit volgt dat

$$\ln \frac{D_*}{D_0} = H_0(t_* - t_0)$$

of nog

$$D_*(t_*) = D_0 e^{H_0(t_* - t_0)}$$

Het resultaat is dat het universum momenteel een exponentiële expansie ondergaat. Voor $t_* = t_0$ vinden we dat $D_* = D_0$, zoals het hoort. Verder zien we voor $t_* > t_0$ dat de afstand vergroot ten opzichte van de huidige afstand. Het omgekeerde geldt voor $t_* < t_0$.

d) Schat de huidige leeftijd van het universum. Druk je antwoord uit in jaren. Gebruik het antwoord dat je hebt gevonden in deelvraag (2b). Hierbij mag je aannemen dat de snelheden van de sterrenstelsels doorheen de tijd niet zijn veranderd.

We kunnen een schatting maken van de leeftijd van het universum door aan te nemen dat de snelheden van sterrenstelsels doorheen de tijd niet zijn veranderd en gelijk zijn aan de geobserveerde snelheden vandaag. Dit is uiteraard niet correct, maar het resulteert in een degelijke schatting. De huidige afstand D_0 van een sterrenstelsel zal dan gelijk zijn aan $D_0 = v_0 t_0$, waarbij v_0 de snelheid is die het sterrenstelsel vandaag heeft.
Als we dan verder gebruikmaken van de wet van Hubble-Lemaître, dan volgt hieruit

$$D_0 = H_0 D_0 t_0$$

waaruit

$$H_0 t_0 = 1$$

of nog

$$t_0 = \frac{1}{H_0}$$

Gebruikmakend van

$$H_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} = \frac{72}{10^6 \times 3{,}08567758 \times 10^{13}} \frac{1}{s} = 2{,}33336 \cdot 10^{-18} \frac{1}{s}$$

vinden we

$$t_0 = 4{,}28567 \cdot 10^{17}\ s = 13{,}6 \cdot 10^9\ jaar$$

Open vragenreeks III: verduistering door stof

Sterrenstelsels bevatten grote hoeveelheden gas en stof, die als brandstof dienen om nieuwe sterren te vormen. Tegelijk heeft dit stof een verduisterend effect op het sterlicht, wat ervoor zorgt dat we als waarnemer geen vrije inkijk krijgen in het sterrenstelsel. De extinctie van sterlicht wordt beschreven aan de hand van het concept 'optische diepte' τ, wat centraal staat in deze opgave.

Zijaanzicht van een spiraalsterrenstelsel met een duidelijke stoflaan die het sterlicht verduistert.

Vraag 1.
Beschouw één ster die licht uitzendt in een bepaalde richting met een intensiteit I_0. De intensiteit $I(x)$ van dit sterlicht zal dan afnemen wanneer het licht doorheen een stofwolk gezonden wordt, met x de afstand afgelegd in de stofwolk. Gegeven is de extinctie $dI(x)$ door een verwaarloosbaar dun stofscherm dx:

$$dI(x) = -kI(x)dx \qquad (1)$$

waarbij k de extinctiecoëfficiënt van het stof voorstelt (dit is een constante).
De extinctiecoëfficiënt k van een bepaalde soort stof kan berekend worden als

$$k = \rho\kappa \qquad (2)$$

met ρ de massadichtheid van de stof (we veronderstellen dat dit eveneens een constante is):

$$\kappa_C = 20000\ cm^2/g$$

voor stof dat bestaat uit koolstofverbindingen en

$$\kappa_{Si} = 40000\ cm^2/g$$

voor stof bestaande uit silicaten.

a) Toon door middel van een integratie aan dat

$$I(x) = I_0\, e^{-\tau(x)}$$

en bewijs zo dat de optische diepte gelijk is aan

$$\tau(x) = kx = \rho\kappa x$$

Uit (1) vinden we

$$\frac{dI}{I} = -kdx$$

Integratie levert vervolgens

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_0^x k\, dx$$

Hieruit volgt dat

$$\ln\frac{I}{I_0} = -kx$$

of nog

$$I(x) = I_0 e^{-kx}$$

Dus $I(x)$ is van de vorm

$$I(x) = I_0 e^{-\tau(x)}$$

met

$$\tau(x) = kx$$

b) Wat is de optische diepte τ van een koolstofwolk met een diepte van 1 kpc en een massadichtheid $\rho = 2{,}8 \times 10^{-23}\ kg/m^3$?

Uit $\tau = kx$ volgt met (2) dat

$$\tau = \rho\kappa x$$

Voor de koolstofwolk vinden we

$$\begin{aligned}\tau_C &= 2{,}8 \cdot 10^{-23}\ kg/m^3 \times 20000\ cm^2/g \times 1\ kpc \\ &= 2{,}8 \cdot 10^{-23}\ \frac{kg}{m^3} \times 2000\ \frac{m^2}{kg} \times 1000 \times 3{,}08567758 \times 10^{16}\ m \\ &= 1{,}7279794\end{aligned}$$

c) Noem $I_{obs} = I(D)$ de waargenomen intensiteit van het sterlicht, met D de diepte van de stofwolk tussen de ster en de waarnemer. Met hoeveel procent wijzigt I_{obs} wanneer dezelfde wolk (zelfde ρ en D als in deelvraag b) zou bestaan uit silicaten in plaats van koolstof?

Analoog als bij de vorige vraag vinden we in het geval van silicaten dat

$$\tau_{Si} = 2\tau_C$$

De intensiteit zal dus afnemen. De gevraagde relatieve wijziging is dan

$$1 - \frac{I_{Si}}{I_C} = 1 - \frac{I_0\, e^{-\tau_{Si}}}{I_0\, e^{-\tau_C}} = 1 - e^{-\tau_C} = 1 - 0{,}177643$$

zodat

$$1 - \frac{I_{Si}}{I_C} = 82{,}2357\%$$

d) Voor een wolk (zelfde ρ en D) bestaande uit koolstofverbindingen én silicaten, voor welke massaverhouding tussen de koolstofverbindingen en silicaten is de optische diepte juist gelijk aan 2?
Geef de massadichtheid voor elk van deze stofcomponenten in eenheden kg/m^3.

De optische diepte is gelijk aan de som van de bijdrage door koolstofverbindingen en silicaten:

$$\tau = \rho_C\kappa_C D + \rho_{Si}\kappa_{Si} D$$

Anderzijds is ook

$$\rho_C = f \cdot \rho$$

en

$$\rho_{Si} = (1-f) \cdot \rho$$

met ρ de totale massadichtheid, en f en $1–f$ de respectieve massafracties van koolstofverbindingen

en silicaten.
τ gelijkstellen aan 2 levert:

$$2 = \rho\, f\, \kappa_C\, D + \rho\, (1 - f)\, \kappa_{Si}\, D$$

Oplossen naar f levert:

$$f = \frac{\frac{2}{\rho\, D} - \kappa_{Si}}{\kappa_C - \kappa_{Si}} = 0{,}8425788$$

We vinden

$$\rho_C = f \cdot \rho = 2{,}359 \times 10^{-23}\, \frac{kg}{m^3}$$

en

$$\rho_{Si} = (1 - f) \cdot \rho = 4{,}4078 \times 10^{-24}\, \frac{kg}{m^3}$$

e) Met welke factor neemt de waargenomen lichtintensiteit in de vorige deelvraag (d) toe, wanneer dezelfde stofwolk maar half zo diep ($D = 0{,}5\ kpc$) is?

De optische diepte is

$$\tau = \rho \kappa x$$

dus als de wolk maar half zo diep is, zal ook τ halveren.
De lichtintensiteiten verhouden zich dan als

$$\frac{I(0{,}5)}{I(1)} = \frac{I_0 e^{-1}}{I_0 e^{-2}}$$

Zodat lichtintensiteit dus met een factor e toeneemt.

f) Voor welke waarde τ voor de optische diepte wordt een stofwolk ondoordringbaar, en wordt er geen sterlicht waargenomen?

Dit is een soort van strikvraag, omdat er altijd licht zal doorkomen.

Vraag 2.
Leg in maximum vijf zinnen uit waarom stof bestudeerd wordt aan de hand van infrarood observaties, en waarom dit vanuit de ruimte gebeurt.

Stof absorbeert licht in het ultraviolet tot optische golflengtegebied, warmt op, en verliest deze energie in het infrarood. Stof verduistert dus in het optische golflengtegebied, maar straalt in het infrarood: neem stof rechtstreeks waar in plaats van door zijn verduisterend effect. Verder wordt infrarood emissie ook niet opnieuw verduisterd door stof. Infrarood wordt waargenomen vanuit de ruimte vanwege de ondoorzichtigheid van de aardatmosfeer.

Open vragenreeks IV: tweelichamenprobleem

Bij de vragen hieronder kan gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

$\mu_\odot \cong GM_\odot = 1{,}327 \times 10^{20}\ m^3 s^{-2}$
Afstand van Mars tot de Zon: $r_{mars} = 1{,}5237\ AE$
Afstand van de Aarde tot de Zon: $r_\oplus = 1\ AE = 1{,}496\ \times 10^{11} m$
Rotatiesnelheid van de Aarde rondom de Zon: $v_\oplus = 29{,}79\ km/s$

Vraag 1.
Kepler publiceerde in het begin van de 17de eeuw zijn drie bekende wetten. Deze wetten geven een beschrijving van de beweging van een hemellichaam om een ander hemellichaam. Dit vraagstuk is ook gekend als het tweelichamenprobleem. Een volledige beschrijving voor dit tweelichamenprobleem kwam er echter pas toen Newton zijn zwaartekrachttheorie ontwikkelde. Met behulp van deze zwaartekrachttheorie kan bewezen worden dat twee objecten die enkel onderworpen zijn aan elkaars gravitatie, zich altijd op een baan zullen bevinden die de vorm heeft van een kegelsnede. De meest algemene vergelijking voor een kegelsnede is de volgende:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(T)}$$

Hierin stellen r en T de poolcoördinaten voor van een punt op de kegelsnede, waarbij r de afstand tot één van de brandpunten weergeeft en T de hoek met de lange as vormt zoals weergegeven in de figuur bovenaan de volgende bladzijde. Deze hoek T wordt ook wel de ware anomalie van een punt op de kegelsnede genoemd. Verder wordt a gedefinieerd als de lengte van halve lange as van de kegelsnede en wordt e de excentriciteit van de kegelsnede genoemd.

a) Welke soorten kegelsneden zijn er? En wat is hun verband met de excentriciteit e?

In het geval de excentriciteit e groter is dan 1, spreken we over een hyperbool. In het speciale geval dat e = 1 krijgen we een parabool. In beide gevallen is de baan echter niet gesloten. Dit wil zeggen dat de objecten op een bepaald moment oneindig ver van elkaar verwijderd waren, daarna naar elkaar toe bewegen, op een parabolische of hyperbolische baan, en zich dan weer tot een oneindig grote afstand van elkaar verwijderen. In het geval de excentriciteit kleiner is 1 spreken we over een ellips. In dit geval zijn beide objecten aan elkaar gebonden en bevinden ze zich in een gesloten baan. De objecten zullen dan in principe eeuwig op een ellipsvormige baan periodiek om elkaar heen bewegen. In het speciale geval dat de excentriciteit gelijk is aan 0 bevinden de objecten zich op een circulaire baan met r = a.

Soms is het echter eenvoudiger om de beschrijving van de ellips niet ten opzichte van één van de brandpunten te doen, maar ten opzichte van het centrum van de kegelsnede, wat bij een ellips in het midden van de ellips ligt. De afstand tussen dit centrum en het brandpunt is gelijk aan ea. In een beschrijving ten opzichte van dit coördinatensysteem wordt de vergelijking van een kegelsnede in functie van de excentrische anomalie E (hoek tussen lange as en positievector vanuit het centrum) gegeven door:

ellips: $r = a(1 - e\cos(E))$
hyperbool: $r = a(e\cosh(E) - 1)$

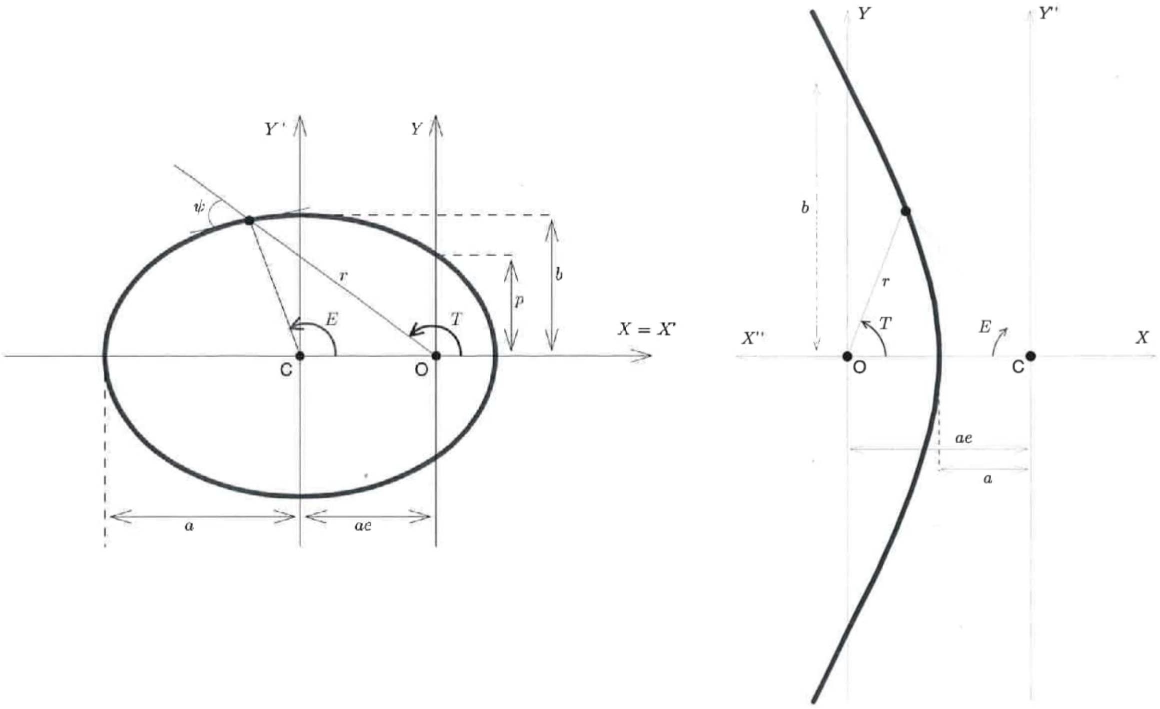
Het tweelichamenprobleem oplossen, geeft aanleiding tot een behouden grootheid, de energie van het totale systeem. Deze kan geschreven worden als de energie per massa-eenheid als:

$$\varepsilon = \frac{E_t}{m} = sign(e^2 - 1)\,\frac{\mu}{2a}$$

Hierbij staat $sign(e^2 - 1)$ voor het teken van de waarde $e^2 - 1$ (positief of negatief) en

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

waarbij G de universele gravitatieconstante is en m_1 en m_2 de massa's voorstellen van de twee objecten beschreven door het tweelichamenprobleem.



Een ellips en een hyperbool kunnen zowel beschreven worden in functie van de ware anomalie (T) als in functie van de excentrische anomalie (E).

b) Welk besluit kun je trekken over de totale energie van het systeem van twee lichamen in functie van de excentriciteit van hun banen? Hoe staat de totale energie van het systeem in relatie tot de fysieke banen van de twee lichamen?

Als de excentriciteit groter is dan 1 dan zal de waarde van de totale energie positief zijn. Is deze kleiner dan 1, dan is de totale energie negatief. Een totale energie met negatieve waarde correspondeert met een gebonden systeem. Dit zien we ook terug in de banen van het systeem. De twee lichamen zullen in een periodieke baan rondom elkaar heen bewegen. Wordt de totale energie van een systeem te hoog ($E_t > 0$), dan hebben de twee lichamen genoeg energie om aan elkaars gravitatieveld te ontsnappen. De lichamen bevinden zich dan niet langer op een gesloten elliptische baan, maar volgen een hyperbolische baan (of parabolische baan in het speciale geval waar $E_t = 0$).

Een andere behouden grootheid is het draaimoment $\vec{h}$ van een planeet[2]. Dit wordt gegeven door het vectorieel product van de positievector van de planeet en de snelheidsvector van de planeet:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}.$$

De grootte van dit draaimoment kan ook geschreven worden als

$$h = rv\,sin(\theta)$$

waarin θ de hoek tussen beide vectoren $\vec{r}$ en $\vec{v}$ voorstelt. Uit de oplossing van het tweelichamenprobleem kan verder ook de volgende vergelijking afgeleid worden:

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\,cos(T)}$$

c) Toon aan dat het draaimoment geschreven kan worden als

$$h = \sqrt{\mu a|1-e^2|}$$

waarbij a de lengte van de halve lange as van een kegelsnede voorstelt.

We kunnen de oplossing

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\,cos(T)}$$

identificeren met de algemene vergelijking van een kegelsnede

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(T)}$$

en vinden zo dat

$$\left|\frac{h^2}{\mu}\right| = |a(1-e^2)|$$

Aangezien de waarde tussen de absolutewaardetekens in het linkerlid altijd positief is, kunnen we besluiten dat

$$h = \sqrt{\mu a|1-e^2|}$$

Vraag 2.

Ten slotte levert de oplossing van het tweelichamenprobleem ook een relatie tussen de positie van het object en het tijdstip waarop het zich op die positie bevindt. Voor een ellips en hyperbool gelden volgende relaties:

ellips: $$E - e\,sin(E) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-\tau)$$

hyperbool: $$e\,sinh(E) - E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-\tau)$$

Hierin stelt τ het tijdstip voor van het moment waarop het lichaam zich in het pericentrum (punt dichtst bij het brandpunt, $E = 0$) bevindt.

Beschouw nu een satelliet op een baan van de Aarde naar Mars. De satelliet wordt gelanceerd vanop de Aarde met een snelheid van 33 km/s. De hoek van de lancering met de raaklijn langsheen de baan van de Aarde bedraagt $\theta = 15°$. (Tip: na lancering zal enkel het gravitatieveld van de Zon van belang zijn.)

[2] Of eender welk lichaam dat zich op een baan rondom de Zon bevindt.

a) Wat is de snelheid van de satelliet ten opzichte van de Zon? Druk je antwoord uit in km/s.

De hoek tussen de rotatiesnelheid van de Aarde en de lanceersnelheid van de satelliet bedraagt 15°. Met behulp van de cosinusregel kunnen we de grootte van de totale snelheid van de satelliet tegenover de Zon vinden:

$$v_t^2 = v_\oplus^2 + v_{rel}^2 - 2v_\oplus v_{rel}\cos(180° - \theta).$$

Hierin stelt v_t de totale snelheid van de satelliet tegenover de Zon voor, stelt $v_\oplus$ de rotatiesnelheid van de Aarde voor, stelt v_{rel} de relatieve snelheid van de satelliet ten opzichte van de Aarde voor en geeft θ de hoek weer tussen de rotatiesnelheid en de relatieve snelheid. Invullen van de correcte waarden voor alle parameters levert dan

$$v_t = 62{,}25\ km/s$$

b) Zal de satelliet op een elliptische of hyperbolische baan bewegen? (Tip: de totale energie van de satelliet kan geschreven worden als de som van zijn kinetische en potentiële energie.)

De totale energie per eenheid van massa van de satelliet kan geschreven worden als de som van de kinetische en potentiële energie van de satelliet:

$$\frac{E_t}{m} = \frac{v_t^2}{2} - \frac{\mu_\odot}{r_\oplus}$$

met m de massa van de satelliet en $\mu_\odot = (M_\odot + m) \cong GM_\odot$ aangezien de massa van de satelliet te verwaarlozen is ten opzichte van deze van de Zon. De correcte waarden invullen levert een totale energie per massa-eenheid

$$\varepsilon = \frac{E_t}{m} = 1.051 \times 10^9\,\frac{J}{kg}$$

De totale energie van de satelliet is dus groter dan 0. De satelliet zal zich dus op een hyperbolische baan naar Mars bewegen.

c) Wat is de lengte van de halve grote as van de baan van de satelliet? Druk je antwoord uit in AE (astronomische eenheden).

Anderzijds weten we ook dat de energie per massaeenheid van de satelliet gegeven wordt door

$$\varepsilon = sign(e^2 - 1)\frac{\mu}{2a} = \frac{\mu}{2a}$$

aangezien de satelliet zich op een hyperbolische baan bevindt. De halve grote as wordt dan gegeven door

$$a = \frac{\mu}{2\varepsilon} = 0{,}422\ AE$$

d) Wat is de excentriciteit van de baan van de satelliet? (Tip: maak hiervoor gebruik van het draaimoment van de satelliet tegenover de Zon en van de hoek die de satelliet tijdens de lancering maakt met de baan van de Aarde.)

De excentriciteit van de baan kan berekend worden door gebruik te maken van het draaimoment van de satelliet tegenover de Zon. Hiervoor dienen we de hoek te kennen tussen de baanvector van de satelliet (die dezelfde zal zijn als die van de Aarde op moment van lancering) en de vector die de totale snelheid van de satelliet weergeeft. Deze wordt gegeven door 90°+α waarin α de

hoek is tussen de rotatiesnelheid van de Aarde en de totale snelheid van de satelliet.
Gebruikmakend van de sinusregel kunnen we stellen dat

$$\frac{\sin(\alpha)}{v_{rel}} = \frac{\sin(180° - \theta)}{v_t}$$

Hieruit volgt dat $\alpha = 7{,}89°$.
Het totale draaimoment van de satelliet kan dan geschreven worden als

$$h_s = |\overrightarrow{r_\oplus} \times \overrightarrow{v_t}| = r_\oplus\, v_t \sin(90° + \alpha)$$

Verder weten we ook dat het draaimoment in het tweelichamenprobleem geschreven kan worden als

$$h = \sqrt{\mu a |1 - e^2|}$$

Combinatie van beide voorgaande vergelijkingen levert dan

$$r_\oplus\, v_t \sin(90° + \alpha) = \sqrt{\mu a |1 - e^2|} = \sqrt{\mu a (e^2 - 1)}$$

aangezien we met een hyperbolische baan te maken hebben. Hieruit kunnen we de volgende uitdrukking en waarde voor de excentriciteit afleiden:

$$e = \sqrt{\frac{r_\oplus^2\, v_t^2\, sin^2(90° + \alpha)}{\mu a} + 1} = 3{,}34$$

e) Hoe lang is de satelliet onderweg naar de baan van Mars? Druk je antwoord uit in dagen, minuten, uren en seconden.

Om de duur van de reis naar Mars te berekenen zullen we eerst de excentrische anomalie van de baan bepalen op het tijdstip waarop de satelliet zich op de baan van de Aarde bevindt (bij lancering) en op het tijdstip waarop de satelliet zich op de baan van Mars bevindt (bij aankomst). Aangezien de satelliet zich op een hyperbolische baan beweegt, geldt dat

$$r = a(e \cosh(E) - 1)$$

Hieruit volgt dat

$$E(r) = argcosh\left(\frac{r + a}{ae}\right)$$

Invullen van de waarden voor de stralen van de banen van de Aarde en Mars levert ons

$$E(r_\oplus) = E_\oplus = 0{,}132$$
$$E(r_{mars}) = E_{mars} = 0{,}846$$

Als we het tijdstip van lancering gelijkstellen aan $t = 0$ dan kunnen we het tijdstip van periheliumdoorgang bepalen door gebruik te maken van de baanvergelijking voor een hyperbolische baan

$$sinh(E) - E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau)$$

wat voor $t = 0$ het volgende resultaat oplevert:

$$\tau = -\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left(e\, sinh(E_\oplus) - E_\oplus\right) = -426500\ s$$

Hiermee kunnen we het tijdstip $t_{aankomst}$ bepalen waarop de satelliet in de baan van Mars terechtkomt:

$$t_{aankomst} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(e\, sinh(E_{mars}) - E_{mars}) - \tau = 2783949\ s$$

De reis naar de baan van Mars duurt dus 32 dagen, 5 uur, 19 minuten en 9 seconden.

Dit is het einde van de eerste ronde van
de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2023.