Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2024

Oplossingen

3 april 2024

In dit document worden oplossingen voorgesteld voor de vragen van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2024. Het spreekt voor zich dat andere methodes eventueel ook tot correcte oplossingen kunnen leiden.

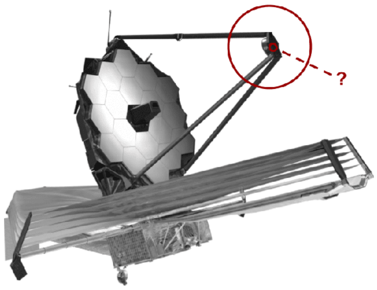
Vlaamse Sterrenkunde Olympiade
Vereniging Voor Sterrenkunde
Zeeweg 96
8200 Brugge

Het organiserend comité van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2024: Jelle Dhaene (Cozmix), Tinne Pauwels (KU Leuven), Frank Tamsin (VVS), Stefan van der Giessen (UGent), Cassandra Van der Sijpt (KU Leuven).

http://www.sterrenkundeolympiade.be
info@sterrenkundeolympiade.be

Meerkeuze vragenreeks

1. Wat is de naam van de JWST-component die hiernaast is aangeduid?
a) Primaire spiegel
b) Secundaire spiegel
c) Optisch subsysteem
d) Antenne
e) Geen van bovenstaande

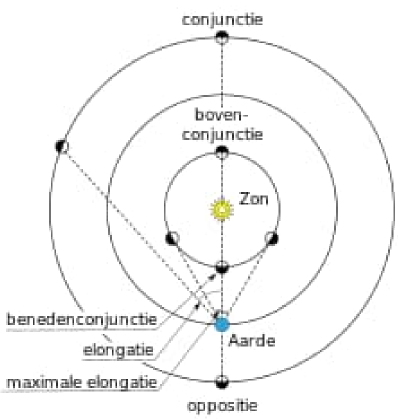


2. Beschouw een hypothetische planeet die rond de Zon draait met een hellingshoek *i* (hoek tussen de rotatie-as en de normaal op het baanvlak). Veronderstel dat een jaar op deze planeet veel langer duurt dan een dag. Definieer een 'tropisch' gebied op de planeet als een gebied waar de Zon ergens in de loop van de omloopperiode het zenit bereikt. Definieer een 'ijskoud' gebied op de planeet als een gebied waar gedurende minstens een dag de Zon nooit opkomt. Wat is de minimumwaarde van *i* waarvoor er een locatie op de planeet bestaat die zowel tropisch als ijskoud is?
a) 0°
b) 30°
c) 45°
d) 60°
e) 90°

De Zon beweegt in de loop van een jaar op en neer (de declinatie verandert) met *i* graden ten opzichte van de evenaar. Omdat het zenit en de horizon (het punt met de grootste hoogte op een pad dat net niet boven de horizon uitkomt, bevindt zich aan de horizon) 90 graden uit elkaar liggen, moet *i* op zijn minst 45 graden zijn opdat de Zon beide zou kunnen bereiken.

3. Welk astronomisch begrip is de algemene term voor drie hemellichamen die zich op één rechte lijn ten opzichte van elkaar bevinden?
a) Conjunctie
b) Eclips
c) Transit
d) Syzygie
e) Kwadratuur

Met een syzygie wordt in de astronomie een configuratie van drie hemellichamen bedoeld, waarbij deze zich in een rechte lijn ten opzichte van elkaar bevinden. Conjunctie is hiervan een specifiek geval.



4. Visuele aurora of poollicht is een spectaculair verschijnsel dat bestaat uit lichtende bogen, stralen en banden aan de nachthemel en is vooral waarneembaar op hogere geografische breedtes. Deze aurorae situeren zich in de
a) troposfeer;
b) stratosfeer;
c) ozonlaag;
d) ionosfeer.
e) mesosfeer.

Wanneer de Zon deeltjes de ruimte in schiet, zoals bij zonnewinden of zonnevlammen, kunnen die met hoge snelheid tegen onze magnetosfeer botsen. De druk verstoort de magnetosfeer waardoor die in aanraking komt met de ionosfeer. Delen van de atmosfeer lichten op: er ontstaat een aurora.

5. De Zon gaat onder in Londen (51°30’ NB, 0°08’ WL) om 21.00 h UT. Hoe laat gaat diezelfde dag de Zon onder in Cardiff (51°30’ NB, 3°11’ WL)?
a) 21.12 h UT.
b) 21.00 h UT.
c) 20.48 h UT.
d) 20.58 h UT.
e) 21.03 h UT.

Het verschil in lengteligging is hierbij de bepalende factor. Een verschil in lengteligging van 360° / 24 = 15° komt overeen met een tijdsverschil van 1 h. Cardiff ligt 3°03’ westelijker dan Londen, zodat de Zon er ongeveer 12 minuten later zal ondergaan.

6. We beschouwen twee objecten met gelijke massa. Als we de afstand tussen de beide objecten verdubbelen, met welke factor neemt de zwaartekracht tussen de twee objecten dan af?
a) $1/\sqrt{2}$
b) $1/2$
c) $1/4$
d) $1/8$
e) De zwaartekracht neemt helemaal niet af; die blijft precies dezelfde.

Zij M de massa van elk van de objecten en zijn r_1 en r_2 respectievelijk de oorspronkelijke en de verdubbelde afstand, zodat dus $r_2 = 2r_1$. Zijn F_1 en F_2 respectievelijk de oorspronkelijke zwaartekracht en deze na verdubbeling van de afstand, dan is

$$F_2 = G\frac{M \cdot M}{r_2^2} = G\frac{M \cdot M}{(2r_1)^2} = \frac{1}{4}G\frac{M \cdot M}{r_1^2} = \frac{1}{4}F_1$$

7. Welk van de volgende sterrenbeelden staat niet op het afgebeelde stuk van de sterrenhemel?

a) Maagd (Virgo)
b) Zuiderkruis (Crux)
c) Wolf (Lupus)
d) Weegschaal (Libra)
e) Noorderkroon (Corona Borealis)

Op onderstaande figuur zijn de sterrenbeelden aangeduid.

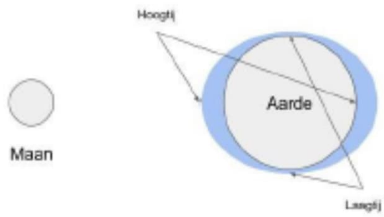
8. Dubhe (declinatie δ = 61,75°) is een ster in het sterrenbeeld Ursa Major Grote Beer). Gevraagd is of deze ster circumpolair is, respectievelijk vanuit de stad San Francisco (op 37,7° noorderbreedte) van vanuit de stad Miami (op 25,8° noorderbreedte)?
a) Ja – ja
b) Ja – nee
c) Nee – ja
d) Nee – nee
e) Er is meer informatie nodig om dit te kunnen bepalen.

Op het noordelijk halfrond zijn sterren circumpolair als hun declinatie groter is dan de complementaire breedtegraad van de waarnemer. Als ϕ de geografische breedteligging is, en δ de declinatie van het object, dan is de ster circumpolair op voorwaarde dat $\delta > 90° - \phi$.

9. Planeet Negen is een hypothetische planeet in de buitenste regionen van zonnestelsel, ergens tussen 400 en 800 AE van de Zon. Welke van de volgende opties is een mogelijke omlooptijd voor Planeet Negen?
a) 71,1 jaar
b) 600 jaar
c) 1500 jaar
d) 15000 jaar
e) 360000 jaar

Als a de gemiddelde afstand van de planeet tot de Zon is uitgedrukt in AE (astronomische eenheden) en P de omloopperiode in jaar, dan geldt volgens de derde wet van Kepler dat $P^2 = a^3$. Met afstanden tussen 400 en 800 AE vinden we dus een omloopperiode tussen 8000 en 22627 jaar.

10. De getijden van de zeeën op de Aarde worden voornamelijk beïnvloed door de Maan, zoals te zien is in de figuur. De hoogtij aan de kant van de Maan wordt direct veroorzaakt door de aantrekkingskracht van de Maan. Maar waardoor wordt de hoogtij aan de andere kant van de Aarde veroorzaakt?



a) Centrifugale kracht veroorzaakt door de Aarde en de Maan die om een gemeenschappelijk punt heen draaien.
b) De Maan staat verder van de verre kant van de Aarde waardoor er minder kracht op het water wordt uitgeoefend.
c) De aantrekkingskracht van de Zon.
d) De draaiing van de Aarde om haar eigen as.
e) De tekening is misleidend: op dat ogenblik is er helemaal geen hoogtij aan de andere kant van de Aarde.

11. Een dubbelstersysteem heeft twee componenten A en B. Ster A heeft 5 keer de massa van de Zon en ster B heeft dezelfde massa als de Zon. Aannemende dat beide sterren cirkelvormige banen beschrijven, hoeveel keer dichter bevindt ster A zich dan bij het massacentrum dan ster B?

a) 1 keer.
b) 3 keer.
c) 5 keer.
d) 10 keer.
e) 25 keer.

Zijn d_A en d_B respectievelijk de afstand van component A en component B tot het massacentrum, en zijn m_A en m_B de massa's van de sterren. Dan geldt dat

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

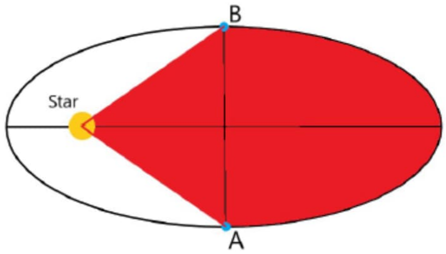
We vinden dus

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{5\ M_\odot}{1\ M_\odot} = 5$$

12. Een planeet beweegt in een elliptische baan rond een ster. Laat r_{min} de minimale afstand van de planeet tot de ster zijn, en laat r_{max} de maximale afstand van de planeet tot de ster zijn. Stel dat $r_{max} = 4\ r_{min}$. Gedurende welk percentage van de omloopperiode is de planeet minstens 2,5 r_{min} verwijderd van de ster?

a) 23%
b) 50%
c) 57%
d) 69%
e) 77%

Als e de excentriciteit is van de ellips en a de lengte van de halve grote as, dan geldt dat $r_{min} = a\ (1 - e)$ en $r_{max} = a\ (1 + e)$. Hieruit vinden we dat $(1 + e)\ /\ (1 - e) = 4$, zodat $e = 3/5$. Daaruit volgt meteen dat $r_{min} = 2/5\ a$ en dus $a = 5/2\ r_{min}$.
Uit de eigenschappen van een ellips weten we dat de punten A en B waar de kleine as de ellips snijdt, op een afstand a van de brandpunten van de ellips gelegen zijn. Deze punten markeren dus het deel van de elliptische baan waar de afstand tot de ster groter is dan 5/2 r_{min} = 2,5 r_{min}.
Om te berekenen welk percentage van de omloopperiode op dit deel van de baan wordt doorgebracht, gebruiken we de tweede wet van Kepler.
Zij Δt de tijd die de planeet erover doet om van A naar B te gaan, en zij T de totale omloopperiode van de planeet rond de Zon. Dan zegt de tweede wet van Kepler dat



$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{2\,\frac{ae\,b}{2} + \frac{\pi ab}{2}}{\pi\ a\ b} = \frac{aeb + \frac{\pi ab}{2}}{\pi\ a\ b} = \frac{e}{\pi} + \frac{1}{2}$$

zodat.

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0{,}6}{\pi} + \frac{1}{2} \approx 0{,}69$$

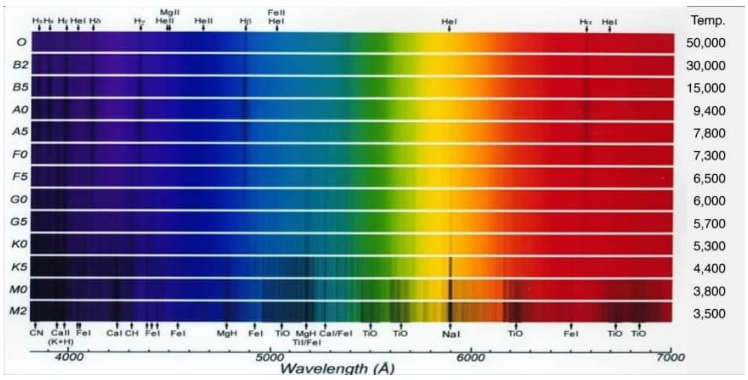
13. De straal van de Maan is ongeveer 4 keer kleiner dan de straal van de Aarde. De gemiddelde albedo's van de Maan en de Aarde zijn respectievelijk 0,12 en 0,36. De Mars Reconnaissance Orbiter maakte een foto van het Aarde-Maan-systeem. Hoeveel keer helderder dan de Maan verscheen de Aarde in de afbeelding?

a) 4 / 9
b) 4 / 3
c) 16 / 3
d) 12
e) 48

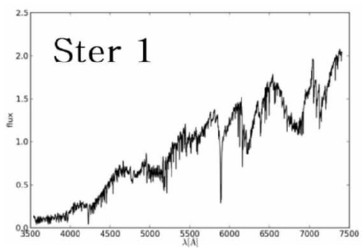
De helderheid van elk object is afhankelijk van zowel de waargenomen oppervlakte en de albedo. Deze verhouding is

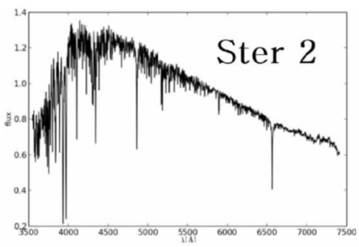
$$\frac{oppervlakte\ Aarde \times albedo\ Aarde}{oppervlakte\ Maan \times albedo\ Maan} = 4^2 \times \frac{0,36}{0,12} = 48$$

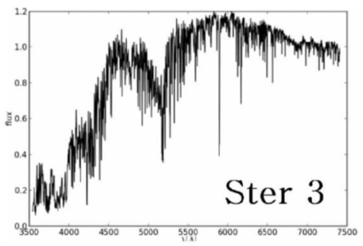
14. Sterren zijn onderverdeeld in zogenaamde spectraalklassen, gebaseerd op de kleur en het spectrum van het uitgestraalde licht. Onder de normale hoofdreekssterren onderscheiden we 7 klassen: O, B, A, F, G, K en M (op volgorde van hoge naar lage temperatuur). Verder worden deze klassen nog verder onderverdeeld met een getal tussen de 0 en 9 (waarbij 0 blauwer is dan 9). De figuur rechts laat voorbeelden van zulke spectra zien.



In de figuren hieronder staan spectra van drie sterren. Eén ster is van type M6, één van type K4, en één van type F8.







Welke uitspraak is correct?

a) Ster 1 is type M6, ster 2 is type K4, ster 3 is type F8
b) Ster 1 is type M6, ster 2 is type F8, ster 3 is type K4
c) Ster 1 is type K4, ster 2 is type M6, ster 3 is type F8
d) Ster 1 is type K4, ster 2 is type F8, ster 3 is type M6
e) Ster 1 is type F8, ster 2 is type M6, ster 3 is type K4
f) Ster 1 is type F8, ster 2 is type K4, ster 3 is type M6

15. Wetenschappers detecteren géén CH_3OH en géén NH_3 in de atmosfeer van een zogenoemde sub-Neptunus exoplaneet. Op welk type planeetoppervlak lijkt dit het meest te wijzen?
a) Ondiep oppervlak
b) Wateroceanen
c) Droog oppervlak
d) Methaanoceanen
e) Geen van bovenstaande

Het niet detecteren van zowel NH_3 als CH_3OH kan een globale water-oceaanwereld impliceren (Hu et al. 2021), aangezien deze moleculen zeer goed oplosbaar zijn in water. Bijkomende informatie is bijvoorbeeld te vinden op
https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021ApJ...922L..27T/abstract.

16. Als de Aarde de dichtheid van een neutronenster zou hebben, wat zou dan de diameter van de Aarde zijn (in de veronderstelling dat de massa van de Aarde ongewijzigd blijft)?
a) Tussen 1 en 100 meter
b) Tussen 100 en 500 meter
c) Tussen 500 en 1000 meter
d) Tussen 1000 en 5000 meter
e) Meer dan 5000 meter

De massa van de Aarde is ongeveer $M_\oplus = 6 \times 10^{24}$ kg.
Een goede schatting voor de dichtheid van een neutronenster is $\rho = 4 \times 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$.
Het volume van de Aarde zou dan dus $M_\oplus/\rho = 15 \times 10^6 \mathrm{m^3}$ bedragen, wat leidt tot een straal van 153 meter en dus een diameter van 306 meter.

17. Beschouw een telescoop met brandpuntsafstand $f = 1$ meter en openingsverhouding $f/9$, die werkt bij de zichtbare golflengte $\lambda = 5000$ Å (1 Å = 1 ångström = 10^{-10} m). Wat is de grootste mogelijke afstand waarop een open sterrenhoop met een straal $R_C = 4{,}1$ parsec kan worden onderscheiden door deze telescoop?
a) $1{,}2 \cdot 10^6$ pc
b) $1{,}5 \cdot 10^6$ pc
c) $3{,}0 \cdot 10^6$ pc
d) $4{,}2 \cdot 10^6$ pc
e) $5{,}8 \cdot 10^6$ pc

Als d de afstand tot de open sterrenhoop is en θ de hoekdiameter, dan geldt dat $\theta = 2 R_C / d$.
De maximale resolutie van een de telescoop is $1{,}22\ \lambda / D$, waarbij D de diameter van de telescoop.
Stellen we deze aan elkaar gelijk, dan vinden we $1{,}22 \frac{\lambda}{D} = 2 \frac{R_C}{d}$ waaruit volgt dat

$$d = \frac{2}{1{,}22} \frac{D}{\lambda} R_C = \frac{2}{1{,}22} \frac{f}{9\,\lambda} R_C = \frac{2}{1{,}22} \frac{1}{9 \times 5000 \times 10^{-10}} 4{,}1 \text{ pc}$$

18. Beschouw een hoofdreeksster met een massa van 9,1 · 10^{29} kg. In deze ster is de proton-proton-cyclus actief, die werkt met een efficiëntie van ε = 0,7%. De waterstof- en heliumfracties (in massa) van deze ster aan het begin van haar leven bedragen f_H = 0,71 en f_{He} = 0,22. Veronderstel dat de ster dezelfde lichtkracht heeft als onze Zon en dat alle waterstof voor fusie kan worden gebruikt. Wat is dan de levensduur van deze ster?

a) 3,3 · 10^{17} s
b) 1,1 · 10^{18} s
c) 1,5 · 10^{18} s
d) 1,5 · 10^{20} s
e) 2,2 · 10^{22} s

Als M de massa is van de ster, dan is de beschikbare massa aan waterstof gelijk aan f_H · M (aangezien de proton-proton-cyclus enkel waterstof gebruikt en geen helium). De totale hoeveelheid energie die vrijkomt in de loop van het leven van de ster is dan ε · f_H · M · c^2. Aldus bedraagt de levensdfuur van de ster

$$\frac{\varepsilon \cdot f_H \cdot M \cdot c^2}{L_\odot} = \frac{0{,}007 \times 0{,}71 \times 9{,}1 \cdot 10^{29} \times (3 \cdot 10^8)^2}{3{,}8 \cdot 10^{26}} s$$

19. De exoplaneet HD 209458b heeft een straal van 1,35 Jupiter-stralen, terwijl de straal van de ster HD 209458 zelf 1,20 keer de straal van onze Zon bedraagt. Wat is de transitdiepte (in procent) van HD 209458b?

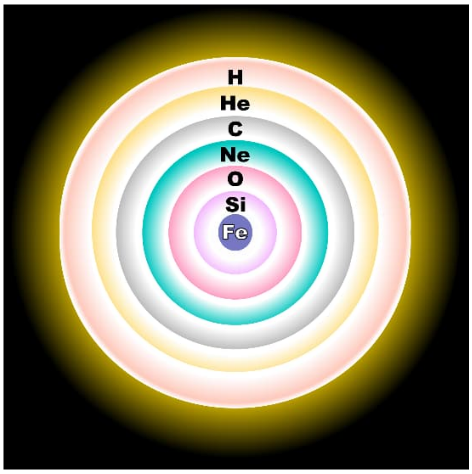
a) 0,013%
b) 0,13%
c) 1,3%
d) 13%
e) 100%

Zij R_p de straal van de planeet en R_s de straal van de ster, dan valt de transitdiepte te berekenen als

$$\frac{\pi R_p^2}{\pi R_s^2} = \left(\frac{1{,}35 \times 7 \cdot 10^7}{1{,}20 \times 7 \cdot 10^8}\right)^2 \approx 0{,}0013$$

20. Naarmate het leven van een ster vordert, worden er zwaardere elementen geproduceerd. De elementen vormen aldus lagen in de ster. In welke volgorde komen we die tegen (beginnend bij de buitenste laag)?

a) H → He → Li → N → O → Si → Fe
b) H → He → C → O → Ne → Si → Fe
c) H → He → Li → O → Ne → Si → Fe
d) H → He → C → N → O → Si → Fe
e) H → He → C → O → Li → Si → Fe



21. Beschouw het volgende weinig opbeurende scenario. De Zon is een rode reus geworden en haar straal verdubbelt elke 100 jaar. Dit zou de mensheid uiteraard zorgen baren. Onder andere volgende fenomenen zouden zich voordoen:

(I) De Aarde zal door de Zon opgeslokt worden.
(II) Ten gevolge van getijdeneffecten op de buitenste atmosfeer van de Zon, zal de baan van de Aarde kleiner worden.
(III) Een op hol geslagen broeikaseffect als gevolg van extreme temperaturen, waardoor de Aarde een hete, Venusachtige planeet wordt (en dus niet meer bewoonbaar zal zijn).

Rangschik bovenstaande fenomenen in oplopende chronologische volgorde:

a) (I) – (II) – (III)
b) (II) – (III) – (I)
c) (III) – (I) – (II)
d) (III) – (II) – (I)
e) (I) – (III) – (II)

Voor bijkomende informatie kan men bijvoorbeeld *https://en.wikipedia.org/wiki/Future_of_Earth* raadplegen.

22. Welke van volgende theorieën gaat niet over het ontstaan van dubbelsterren?
a) Schijffragmentatie
b) Competitieve accretie
c) Kernfragmentatie
d) Gravitationele vangst
e) Geen enkele van de genoemde theorieën gaat over het ontstaan van dubbelsterren.

Competitieve accretie is een model dat wordt gebruikt om het ontstaan van zware sterren te verklaren.

23. Een astronoom observeert twee sterrenstelsels, A en B, vanaf de Aarde. Sterrenstelsel A heeft een schijnbare magnitude van $m_A = 20$ en sterrenstelsel B heeft een schijnbare magnitude van $m_B = 16$. Als sterrenstelsel A vier keer verder van de Aarde verwijderd is dan sterrenstelsel B en de afstand tot sterrenstelsel B bedraagt 700 miljoen lichtjaar, wat zijn dan de absolute magnitudes M_A en M_B van elk sterrenstelsel?
a) $M_A = -22{,}2$ en $M_B = -23{,}2$
b) $M_A = -19{,}7$ en $M_B = -20{,}7$
c) $M_A = -23{,}7$ en $M_B = -16{,}7$
d) $M_A = -13{,}6$ en $M_B = -20{,}7$
e) $M_A = -20{,}7$ en $M_B = -19{,}7$

Als d_A en d_B de afstand van respectievelijk sterrenstelsel A en B voorstellen (uitgedrukt in parsec), dan vinden we met de afstandsformule (en het feit dat 1 parsec = 3,26 lichtjaar) dat

$$M_B = m_B + 5 - 5\log d_B = 16 + 5 - 5\log\frac{700\cdot 10^6}{3{,}26} = -20{,}7$$

$$M_A = m_A + 5 - 5\log d_A = 20 + 5 - 5\log\frac{4\times 700\cdot 10^6}{3{,}26} = -19{,}7$$

24. Een astronoom neemt een spectrum van een sterrenstelsel en merkt op dat de waterstof-alfa-emissielijn verschijnt op golflengte 721,9 nanometer. In een laboratorium op Aarde wordt dezelfde emissielijn waargenomen bij een golflengte van 656,3 nanometer. Wat is ongeveer de afstand tot dit sterrenstelsel?
a) 66 Mpc
b) 430 Mpc
c) 480 Mpc
d) 3900 Mpc
e) 4700 Mpc

De roodverschuiving van dit stelsel (is niet relativistisch en) bedraagt

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{721{,}9 - 656{,}3}{656{,}3} = 0{,}1$$

De afstand d van het stelsel kunnen we dan vinden via de wet van Hubble-Lemaître $cz \approx H_0 d$ (waarbij $c \approx 300000\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ en $H_0 \approx 70\ \mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$).

25. De normale golflengte van de Hα-lijn van waterstof is 656,3 nm. Veronderstel dat we bij een bepaalde ster die lijn waarnemen op golflengte 662,5 nm. Wat is dan de radiale snelheid van die ster ten opzichte van de Aarde?

a) +2,83·10⁶ m/s.

b) –2,83·10⁶ m/s.

c) +0,00945 m/s.

d) –0,00945 m/s.

e) –2,83·10³ m/s.

Het verschil in golflengte is van die aard dat de formules voor niet-relativistische roodverschuiving kunnen toegepast worden en derhalve

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

waarbij *v* de radiële snelheid is en *c* de lichtsnelheid. Aldus is

$$v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} c = \frac{662{,}5 - 656{,}3}{656{,}3} \times 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Merk op dat een positieve radiale snelheid overeenkomt met een verwijdering tussen object en waarnemer.

26. Een object beweegt met een snelheid van 0,6 keer de lichtsnelheid in de richting van onze gezichtslijn. Wat is de roodverschuiving *z* van dit object?

a) $\boldsymbol{z = 1}$

b) $z = \sqrt{2}$

c) $z = 1{,}5$

d) $z = 2{,}5$

e) $z = 0{,}6$

In dit geval is de snelheid dermate groot dat gebruikgemaakt dient te worden van de formules voor relativistische roodverschuiving. Derhalve is

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1$$

waarbij v de snelheid van het object voorstelt.

27. Donkere materie wordt zo genoemd omdat we het nog nooit gezien hebben. Toch weten we dat het bestaat. Door welke van de volgende waarnemingen weten we dat donkere materie bestaat?
a) De uiterste gebieden van een sterrenstelsel draaien veel sneller rond dan verwacht op basis van al de zichtbare materie. Dit betekent dat er meer materie voorhanden moet zijn dan zichtbaar is.
b) Grote gebieden van sterren worden geblokkeerd door donkere wolken materie. Deze donkere materie zendt geen licht uit, dus hebben we het nog nooit gezien.
c) Licht kan door de zwaartekracht worden omgebogen. De mate van buiging hangt van de massa af. Voor sommige sterrenstelsels gebeurt dit meer dan verwacht, dus er moet ook meer materie in het sterrenstelsel zijn dan te zien is.
d) Zowel a als b zijn juist.
e) Zowel a als c zijn juist.
f) Zowel b als c zijn juist.
g) a, b en c zijn juist.

Donkere wolken materie zijn niet hetzelfde als donkere materie. Deze donkere wolken zijn immers wel detecteerbaar in andere golflengtegebieden van het elektromagnetisch spectrum.

28. We poneren volgende stellingen over zwarte gaten:
(I) Van alle zwarte gaten komen Schwarzschild zwarte gaten het meeste voor.
(II) Wij weten dat de tijd dilateert in sterke zwaartekrachtsvelden. Als iemand in een zwart gat valt, zullen achterblijvers deze persoon nooit daadwerkelijk in het zwarte gat zien verdwijnen.
a) Alleen stelling (I) is juist.
b) Alleen stelling (II) is juist.
c) Beide stellingen zijn juist.
d) Beide stellingen zijn onjuist.
e) Er bestaat helemaal niet zoiets als Schwarzschild zwarte gaten

Schwarzschild-zwarte gaten zijn een theoretisch model voor zwarte gaten die géén rotatie hebben, iets wat in realiteit onmogelijk te bereiken is.
Het is inderdaad zo dat voor stilstaande buitenstaanders het voorbijsteken van de horizon door een object dat invalt in een zwart gat, oneindig ver in de toekomst ligt.

29. De zogenoemde donkere energie is een model om
a) de straling van zwarte gaten te verklaren.
b) de massaverdeling van sterrenstelsels te verklaren.
c) de versnelling van het heelal te verklaren.
d) de microgolfachtergrond van het heelal te verklaren.
e) elk van de hiervoor genoemde zaken met één globale hypothese te verklaren.

Bijkomende informatie is bijvoorbeeld te vinden op
https://nl.wikipedia.org/wiki/Donkere_energie.

30. Welk van de volgende stellingen over zwaartekrachtsgolven is fout?
a) Objecten van lage massa kunnen in principe zwaartekrachtsgolven produceren.
b) In de toekomst verwachten wij zwaartekrachtsgolven van het vroege universum te kunnen waarnemen.
c) Zwaartekrachtsgolven verplaatsen zich met een snelheid die een fractie lager is dan die van het licht, doordat de ruimte vóór ze uitdijt.
d) Zwaartekrachtsgolven van samensmeltende neutronensterren zijn moeilijker te detecteren dan die van samensmeltende zwarte gaten (op dezelfde afstand).
e) Zwaartekrachtsgolven kunnen geobserveerd worden door de veranderende rotatieperiodes van verschillende pulsars te meten terwijl de golf zich in de ruimte tussen ons en de pulsar verplaatst.

Volgens de algemene relativiteitstheorie kunnen objecten met massa, ongeacht hun grootte, zwaartekrachtsgolven produceren wanneer ze versnellen of asymmetrisch bewegen.
Zwaartekrachtsgolven die zijn ontstaan tijdens de inflatoire periode van het vroege universum worden momenteel niet direct waargenomen, maar theoretische modellen voorspellen hun aanwezigheid en in de toekomst kunnen technologische ontwikkelingen ons helpen om ze waar te nemen.
Zwaartekrachtsgolven bewegen zich voort met de snelheid van het licht in vacuüm, volgens de huidige modellen. De uitdijing van de ruimte heeft geen invloed op hun snelheid.
Zwaartekrachtsgolven van samensmeltende neutronensterren produceren typisch een signaal met een lagere amplitude en kortere duur dan die van samensmeltende zwarte gaten. Hierdoor zijn ze moeilijker te detecteren.
Het meten van de veranderende rotatieperiodes van pulsars wordt gebruikt voor zwaartekrachtsgolfdetectie; dit zijn de zogenaamde pulsar timing arrays.

1.	**B**
2.	**C**
3.	**D**
4.	**D**
5.	**A**
6.	**C**
7.	**E**
8.	**B**
9.	**D**
10.	**A**

11.	**C**
12.	**D**
13.	**E**
14.	**B**
15.	**B**
16.	**B**
17.	**B**
18.	**B**
19.	**C**
20.	**B**

21.	**D**
22.	**B**
23.	**B**
24.	**B**
25.	**A**
26.	**A**
27.	**E**
28.	**B**
29.	**C**
30.	**C**

Open vragenreeks I: de zwarte straler

Bij de vragen hieronder kan gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

Constante van Planck: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$
Lichtsnelheid: $c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}\ m/s$
Constante van Boltzmann: $k = 1{,}380\ \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-1}$

Sterren zenden elektromagnetische straling uit die wij hier op Aarde kunnen waarnemen. De analyse van deze straling kan ons veel vertellen over de eigenschappen van de ster. Het is vaak nuttig om de intensiteit van een ster te benaderen door het spectrum van wat we een ‘zwarte straler’ noemen. Een zwarte straler is een lichtbron die geen licht reflecteert; het waargenomen licht wordt dus volledig door de bron zelf geproduceerd. Bovendien heeft de bron een uniforme temperatuur T (in kelvin): we zeggen dat het gas en de fotonen in thermodynamisch evenwicht zijn. De intensiteit van de uitgezonden straling met een bepaalde frequentie ν van een zwarte straler wordt beschreven door de *Planck functie* $B_\nu(T)$:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

De Planck functie kan ook als functie van golflengte λ geschreven worden

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Vraag 1.

Gegeven $B_\nu(T)$, leid $B_\lambda(T)$ af door gebruik te maken van de relaties $c = \lambda\nu$ en $B_\nu d\nu = -B_\lambda d\lambda$. De tweede relatie zegt dat de totale intensiteit in een frequentie-interval $d\nu$ gelijk moet zijn aan de totale intensiteit in het overeenkomstige golflengte-interval $d\lambda$. Het minteken komt tevoorschijn omdat golflengte en frequentie omgekeerd evenredig zijn.

Uit de relatie $c = \lambda\nu$ volgt dat $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Via de kettingregel voor differentialen weten we dat

$$d\nu = \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda$$

Hieruit vinden we $d\nu$=−$c\lambda 2d\lambda$.

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$$

Vervolgens kunnen we dit gebruiken in de relatie $B_\nu d\nu = -B_\lambda d\lambda$. Dit levert

$$-B_\nu \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = -B_\lambda d\lambda$$

waaruit

$$B_\lambda = \frac{c}{\lambda^2}\, B_\nu$$

Dit resultaat, samen met de relatie $c = \lambda\nu$, leidt dan tot

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Vraag 2.
De Planck functie vertoont een piek in intensiteit bij een bepaalde golflengte λ_{max}. De *verschuivingswet van Wien* is een wet die deze golflengte λ_{max} relateert aan de temperatuur van de zwarte straler, namelijk

$$\lambda_{max}\mathrm{T} = 2897{,}8\ \mu\mathrm{m\ K}.$$

Gebruik de wet van Wien om voor de O-ster Zeta Puppis, met een effectieve temperatuur van 40000 K, de golflengte te vinden waarbij het maximum van de energie optreedt. In welk deel van het elektromagnetisch spectrum bevindt deze piek zich?

De golflengte van de piekintensiteit volgt uit de verschuivingswet van Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{2897{,}8\ \mu\mathrm{m\ K}}{T} = \frac{2897{,}8}{40000}\ \mu\mathrm{m} = 72{,}445\ \mathrm{nm}$$

Dit is ultravioletstraling.

Vraag 3.
Het volledige spectrum van de zwarte straler werd pas gevonden na de ontdekking van de kwantummechanica. Gebruikmakende van de klassieke theorie waren Rayleigh en Jeans erin geslaagd een deel van het spectrum van de zwarte straler te beschrijven, namelijk in de limiet dat $h\nu \ll kT$. Zij vonden

$$B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2}kT,$$
$$B_\lambda(T) = \frac{2ckT}{\lambda^4}.$$

Hun oplossing leidde echter tot de zogenaamde “ultavioletcatastrofe”.
Wat is de “ultravioletcatastrofe”? Leg uit aan de hand van de uitdrukkingen die hierboven gegeven zijn.

De klassieke uitdrukking van Rayleigh en Jeans komt erg goed overeen met de Planck functie voor grote golflengtes (lage frequenties). Voor de kleine golflengtes (hoge frequenties) wordt de intensiteit echter oneindig groot, wat fysisch onmogelijk is. Dit kan je zien door de limiet

$$\lim_{\lambda\to 0} B_\lambda = \lim_{\lambda\to 0} \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

te beschouwen. Deze limiet gaat zeer snel naar oneindig ten gevolge van de factor λ^4 in de noemer. Kleinere golflengtes komen overeen met het ultraviolet gedeelte van het elektromagnetisch spectrum waardoor deze discrepantie de “ultravioletcatastrofe” werd gedoopt.

Vraag 4.

De effectieve temperatuur van een ster wordt gedefinieerd als de temperatuur die de ster zou hebben als deze als een perfecte zwarte straler zou schijnen. De flux – de hoeveelheid getransporteerde energie per oppervlakte-eenheid en per tijdseenheid – hangt af van deze effectieve temperatuur als $F = \sigma T_{eff}^4$, waarbij σ de Stefan-Boltzmann constante is.

a) Geef een uitdrukking voor de lichtkracht L van een ster als functie van de straal en de effectieve temperatuur.

De lichtkracht L van een ster kan worden berekend door de totale uitgestraalde energie per tijdseenheid te vinden. De totale uitgestraalde energie per tijdseenheid wordt gevonden door de flux te vermenigvuldigen met de oppervlakte S van de ster:

$$L = S \times F = 4\pi R^2 \times \sigma T_{eff}^4$$

waarbij R de straal van de ster voorstelt.

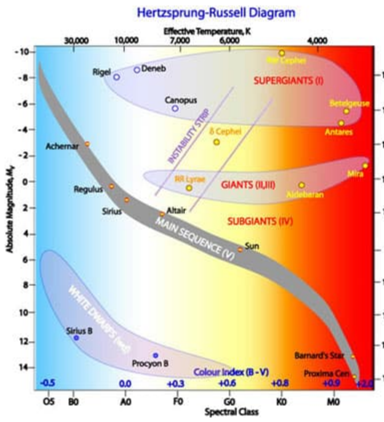
b) Zullen sterren die rechts bovenaan gesitueerd worden in het Hertzsprung-Russell diagram groter of kleiner zijn dan onze Zon?

Sterren rechtsboven in het Hertzsprung-Russell diagram hebben een grote lichtkracht L en een lage effectieve temperatuur T_{eff}. Op basis van de uitdrukking

$$L = 4\pi R^2 \times \sigma T_{eff}^4$$

dat R noodzakelijk groot zal zijn.

Sterren die zich in dit gebied van het HRD bevinden zullen dus groter zijn dan onze Zon.



Open vragenreeks II: sterdichtheid in ons Melkwegstelsel

Bij de vragen hieronder kan gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

Parsec: $1\ pc = 3{,}086 \times 10^{16}\ m$

Reeksontwikkeling: $\log(1+x) = \frac{1}{\ln(10)}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$

Ga ervan uit dat de dichtheidsverdeling van sterren in het Melkwegstelsel voorgesteld kan worden aan de hand van volgende exponentiële functie:

$$n(r) = n_0 e^{-\left(\frac{r-R_0}{R_d}\right)}$$

Hierin stelt

- r de afstand voor tot het centrum van het Melkwegstelsel,
- R_0 de afstand van de Zon tot het centrum van het Melkwegstelsel,
- R_d de straal van de schijf van het Melkwegstelsel,
- n_0 is de dichtheid aan sterren in de omgeving van de Zon.

Alle afstanden in bovenstaand model worden weergegeven in kpc.
Een sterrenkundige observeert een bepaald type rode reuzen in het centrum van ons Melkwegstelsel die als standaardkaarsen gebruikt kunnen worden met een constante absolute helderheid van $M = -0{,}2$.

Vraag 1.
Als een telescoop gebruikt wordt voor deze waarneming die tot een schijnbare helderheid van $m = 18$ kan observeren, bepaal dan de maximale afstand waarop deze telescoop dit type rode reuzen kan detecteren.
Negeer hierbij de verduistering van licht door het interstellaire medium.

De relatie tussen de schijnbare en absolute magnitude wordt gegeven door de zogenaamde afstandsformule:

$$M = m + 5 - 5\log(d)$$

waarbij de afstand d is uitgedrukt in parsec.
Deze formule kan omgevormd worden tot

$$d^{(pc)} = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$$

waarmee we vinden dat

$$d^{(pc)} = 10^{\frac{18-(-0{,}2)+5}{5}} = 10^{4{,}64}$$

zodat $d \approx 43.7\ kpc$.

Vraag 2.

a) Stel een vergelijking op voor de relatie tussen de schijnbare en absolute helderheid van een ster, rekening houdend met een interstellaire verduistering van 0,7 $magnitude/kpc$, veroorzaakt door het interstellaire medium.

We kunnen de verduistering veroorzaakt door het interstellair medium beschrijven door een extra term te introduceren in de hoger vermelde afstandsformule, zodanig dat het licht van de sterren verzwakt wordt. Hierdoor kan de relatie tussen de schijnbare en absolute helderheid geschreven worden als

$$m = M + 5\log(1000x) - 5 + 0{,}7x$$

waarin $x = d/1000$ de afstand in kiloparsec is tot de waargenomen ster. Dit kan verder omgevormd worden tot

$$m = M + 10 + 5\log(x) + 0{,}7x$$

b) Kan je op basis van deze uitdrukking een schatting maken van de maximale afstand waarop dit type rode reuzen nog kan waargenomen worden?

Invullen van de gegeven waarden voor de schijnbare en absolute magnitude, leidt dan tot de uitdrukking

$$18 = -0{,}2 + 10 + 5\log(x) + 0{,}7x$$

of nog

$$5\ log(x) + 0{,}7x - 8{,}2 = 0$$

Deze vergelijking kan niet 'analytische' opgelost worden aan de hand van zogenaamde 'elementaire' functies; er moet met name gebruikgemaakt worden van de Lambert W-functie. Het ligt evenwel meer voor de hand om deze vergelijking numeriek op te lossen (met een van de gekende iteratieve methodes).

Nog eenvoudiger is echter om een schatting voor de maximale waarneembare afstand te maken door *trial-and-error*. Deze uitdrukking wordt ongeveer 0 voor een waarde $x = 6{,}1\ kpc$. Dit wil dus zeggen dat de waarneembare afstand van dit type rode reuzen herleid wordt van 43,7 kpc naar 6,1 kpc door toedoen van het interstellair medium.

Vraag 3.
Geef een uitdrukking voor het aantal van deze rode reuzen dat met een bepaalde schijnbare helderheid m binnen een ruimtehoek Ω geobserveerd kan worden.

Druk dit uit als $\frac{\Delta N}{\Delta m}$ in functie van m. Ga ervan uit dat dit type rode reuzen een bepaalde fractie f van de totale sterpopulatie voorstelt. Ga er verder ook van uit dat voor deze berekening er geen verduistering door het interstellair medium optreedt. (Hint: gebruik de gegeven Taylor serie die geldig is wanneer $x \ll 1$).

Het aantal sterren waargenomen binnen een ruimtehoek Ω op een afstand tussen x en $x + \Delta x$ wordt gegeven door

$$\Delta N = volume \ \times fractie\, rode\, reuzen \ \times sterdensiteit$$

of

$$\Delta N = \Omega x^2 \Delta x \ \times f \ \times n(r)$$

Dit kan geschreven worden als

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = \Omega x^2 f n(r) \qquad (1)$$

Verder kan de schijnbare magnitude voor de sterren waargenomen op een afstand x (uitgedrukt in kiloparsec) geschreven worden als

$$m = M + 5\log(x) + 10$$

Voor sterren waargenomen op een afstand $x + \Delta x$ bekomen we dan

$$m + \Delta m = M + 5\log(x + \Delta x) + 10$$

Door de twee vorige vergelijkingen te combineren vinden we

$$\Delta m = 5\log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = 5\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Aangezien $\Delta x \ll x$, kan een Taylor reeksontwikkeling gebruikt worden om deze uitdrukking te vereenvoudigen. Dit kan dan geschreven worden als

$$\Delta m = \frac{5}{\ln(10)}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)$$

wat de volgende uitdrukking oplevert:

$$\frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{x\ln(10)}{5} \qquad (2)$$

Het combineren van de vergelijkingen (1) en (2) levert dan een uitdrukking op voor het aantal rode reuzen van dit type die binnen een ruimtehoek Ω en binnen een bereik van m en $m + \Delta m$ waargenomen kunnen worden:

$$\frac{\Delta N}{\Delta m} = \frac{\Delta N}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta m} = \Omega x^2 f n(r) \times \frac{x\ln(10)}{5}$$

Houden we rekening met de gegeven uitdrukking voor $n(r)$ dan vinden we

$$\frac{\Delta N}{\Delta m} = \frac{n_0 f \ln(10)}{5}\Omega x^3 e^{-\left(\frac{r-R_0}{R_d}\right)}$$

In deze uitdrukking komen twee verschillende afstandsvariabelen voor, namelijk r die de afstand van de waargenomen ster tot het centrum van het Melkwegstelsel beschrijft en x die de afstand tussen de waarnemer (Zon) en de waargenomen ster beschrijft.

Deze beide afstandsvariabelen staan met elkaar in verband volgens:

$$x = R_0 - r \qquad voor\ x < R_0$$
$$x = R_0 + r \qquad voor\ x > R_0$$

Bovenstaande uitdrukking kan nu dus geschreven worden in functie van de schijnbare helderheid m als volgt:

Voor $x < R_0$

$$\frac{\Delta N}{\Delta m} = \frac{n_0 f \ln(10)}{5} \Omega x^3 e^{\left(\frac{x}{R_d}\right)}$$

Voor $x > R_0$

$$\frac{\Delta N}{\Delta m} = \frac{n_0 f \ln(10)}{5} \Omega x^3 e^{\left(\frac{2R_0 - x}{R_d}\right)}$$

waarbij telkens

$$x = 10^{\frac{m-9,78}{5}}$$

Open vragenreeks III: de ster van Barnard

Voor deze vragenreeks kan onder andere gebruikgemaakt worden van volgende gegevens:

Universele gravitatieconstante: $\mathrm{G} = 6{,}67259 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$

Massa van de Zon: $\mathrm{M_{zon}} = \mathrm{M_\odot} = 1{,}989\ \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$

Straal van de Zon: $\mathrm{R_{zon}} = \mathrm{R_\odot} = 6{,}96\ \times 10^{8}\ \mathrm{m}$

Parsec: $1\ pc = \ 3{,}086\ \times 10^{16}\ m$

Astronomische eenheid: $1\ AE = \ 1{,}496\ \times 10^{11}\ m$

Astronoom Edward Emerson Barnard ontdekte in 1916 een rode dwerg met een massa van 0,16 zonsmassa's op ongeveer 6 lichtjaar van de Aarde. Deze ster kreeg de naam 'Ster van Barnard' en beweegt met een hoge snelheid ten opzichte van de Aarde. De ster van Barnard is een haloster. Dit zijn sterren die zich niet in het vlak van een sterrenstelsel bevinden, maar een baan hebben met een willekeurige inclinatie.
We zijn benieuwd naar de kans dat zo'n ster botst met een ster in de schijf van het Melkwegstelsel. Je mag hiervoor veronderstellen dat de schijf van het Melkwegstelsel een dikte heeft van 300 pc en een constante massadichtheid van ρ = 0,15 zonsmassa's/pc^3. Verder mag je aannemen dat alle sterren in de schijf een massa hebben van 1 zonnemassa en dat de ster van Barnard zich beweegt met een snelheid van 150 km/s.

Vraag 1.
Wanneer de ster van Barnard door de schijf van het Melkwegstelsel beweegt, zal hij botsen met een andere ster als de kinetische energie kleiner is dan de potentiële gravitatie-energie. Hoe dicht moet de ster van Barnard bij een willekeurige ster in de schijf komen vooraleer ze zullen botsen? Je mag aannemen dat de sterren in de schijf niet bewegen. Geef je antwoord in zonnestralen.

Noemen we M_B en v_B respectievelijk de massa en de snelheid van de ster van Barnard, dan wordt de kinetische energie E_{kin} van de ster van Barnard gegeven door

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M_B v_B^2$$

De potentiële energie E_{pot} van de ster van Barnard is

$$E_{pot} = -G\frac{M_{ster,schijf}\, M_B}{d}$$

Waarbij d de afstand voorstelt tussen de ster van Barnard en een ster in de schijf en $M_{ster,schijf}$ de massa van die ster. De twee sterren zullen dus botsen wanneer

$$|E_{kin}| < |E_{pot}|$$

We kunnen dit verder uitwerken en bekomen

$$\frac{1}{2} M_B v_B^2 < G\frac{M_{ster,schijf}\, M_B}{d}$$

waaruit volgt

$$d < 2G\frac{M_{ster,schijf}}{v_B^2}$$

zodat $d < 2 \times 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\, \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}}{(150000)^2}\, m \approx 1{,}18 \cdot 10^{10} m \approx 17\ R_\odot$.

Vraag 2.
De gemiddelde vrije weglengte ℓ is de gemiddelde afstand die een ster kan afleggen voordat deze botst met een andere ster. Deze wordt gegeven door:

$$\ell = \frac{1}{nS}$$

waarbij n de deeltjesdichtheid is en S de geometrische botsingsdoorsnede.
Wat is de gemiddelde vrije weglengte (in parsec) van de ster van Barnard wanneer deze door de schijf beweegt? Wat kan je concluderen over de kans dat deze ster zal botsen met een ster in de schijf?

De botsingsdoorsnede S wordt gegeven door πd^2, waarbij d de maximale afstand is waarbij sterren zullen botsen. De waarde van d werd berekend in de vorige vraag. Daarmee vinden we

$$S = \pi d^2 = \pi(1{,}18 \cdot 10^{10} m)^2$$

De deeltjesdichtheid n is gelijk aan 0,15 pc^{-3}. We gebruiken dan de gegeven formule en vinden

$$\ell = \frac{1}{nS} = \frac{1}{0{,}15\ pc^{-3} \times \pi(1{,}18 \cdot 10^{10} m)^2} = \frac{1}{0{,}15 \times (3{,}086 \cdot 10^{16}\ m)^{-3} \times \pi(1{,}18 \cdot 10^{10} m)^2}$$

zodat

$$\ell = 4{,}4790 \cdot 10^{29}\ m \approx 1{,}45 \cdot 10^{13}\ pc$$

Dit is een zeer grote afstand, veel groter dan de waarde van d berekend in de vorige vraag. Botsingen zijn dus weer onwaarschijnlijk.

Vraag 3.

a) Veronderstel dat de ster van Barnard een planetenstelsel al kan verstoren zodra hij binnen een afstand van 20 astronomische eenheden van een andere ster komt. Welke afstand zal de ster gemiddeld kunnen afleggen (in parsec) voordat de ster een planetenstelsel zal verstoren?

In dit scenario is de botsingsdoorsnede nu gelijk aan $S = \pi\ (20\ AE)^2$ waaruit volgt dat

$$\ell = \frac{1}{nS} = \frac{1}{0{,}15\ pc^{-3} \times \pi(20\ AE)^2} = \frac{1}{0{,}15 \times (3{,}086 \cdot 10^{16}\ m)^{-3} \times \pi(20 \cdot 1{,}496\ 10^{11})^2}$$

zodat $\ell = 6{,}967 \cdot 10^{24}\ m \approx 2{,}3 \cdot 10^{8}\ pc$

b) Hoe vaak moet de ster van Barnard gemiddeld doorheen de schijf bewegen voordat de ster een planetenstelsel kan verstoren?

Dit aantal vinden we door de gemiddelde vrije weglengte te delen door de dikte van de schijf, hetgeen resulteert in $\frac{2{,}3 \cdot 10^8\ pc}{300\ pc} = 7{,}5 \cdot 10^5$ keer.

c) Neem aan dat de ster van Barnard tweemaal doorheen de schijf beweegt per rotatie en 200 miljoen jaar over 1 rotatie doet. Hoe lang zal het dan gemiddeld duren vooraleer de ster een planetenstelsel kan verstoren? Wat kan je hieruit concluderen?

Gemiddeld zal het 100 miljoen jaar duren voordat de ster 1 keer doorheen de schijf heeft bewogen. Het duurt dus gemiddeld $7{,}5 \cdot 10^5 \times 100 \cdot 10^6 = 7{,}5 \cdot 10^{13}$ jaar vooraleer de ster een planetenstelsel zal verstoren. Dit is veel langer dan de leeftijd van het heelal.

Open vragenreeks IV: stof en licht

Bij de vragen hieronder kan gebruikgemaakt worden van volgende informatie:

Constante van Planck: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$
Constante van Boltzmann: $k = 1{,}380\ \cdot 10^{-23}\, J \cdot K^{-1}$
Lichtsnelheid: $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}\, m \cdot s^{-1}$
Lichtkracht van de Zon: $L_{\odot} = 3{,}839 \cdot 10^{26}\, W$
Parsec: $1\, pc =\ 3{,}086\ \times 10^{16}\, m$

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}dx}{e^x - 1}$$

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

De waarden voor de ζ-functie voor enkele even getallen:

$$\zeta(2) = \pi^2/6$$
$$\zeta(4) = \pi^4/90$$
$$\zeta(6) = \pi^6/945$$
$$\zeta(8) = \pi^8/9450$$
$$\zeta(10) = \pi^{10}/93555$$

Wanneer we spreken van straling in de vorm van licht, is de meest eenvoudige bron van licht de thermische energie van een object. Een object met dit gedrag noemen we een zwartlichaamstraler (zwart lichaam, zwarte straler). Een zwartlichaamstraler heeft het volgende emissieprofiel:

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

waarbij B_ν de oppervlaktehelderheid van het object is bij een gegeven frequentie ν. Verder is h de constante van Planck, c de snelheid van het licht, k de constante van Boltzmann en T de temperatuur van het object.

Vraag 1.
De zwartlichaamstraler wordt vaak gebruikt binnen de sterrenkunde om de straling van een ster te beschrijven, maar dit is niet de enige bron van straling. Stofdeeltjes die verspreid zitten tussen de sterren stralen namelijk zelf ook licht uit in de vorm van een zwartlichaamstraler. Van het zichtbaar materiaal dat we zien tussen de sterren, bestaat enkel 1% uit stof en de rest uit gas, maar stof is wel het belangrijkste ingrediënt om de straling te bepalen.
Waarom is het belangrijk om de straling van het stof te meten? Geef hierbij een reden die te maken heeft met de invloed van stof op de straling van objecten en een reden die te maken heeft met de rol van stof in de evolutie van het universum.

Stof is belangrijk om te studeren, omdat het gemiddeld de helft van de uitgezonden straling van sterren en gas absorbeert en op langere golflengtes uitstraalt. Deze absorptie is afhankelijk van het soort stof, de grootte en de relatieve verdeling ten opzichte van de stralingsbronnen, waardoor het een grote onzekerheid introduceert op de identiteit van de bron. Door de absorptie van het licht zorgt het stof ervoor dat het gas tussen de stofdeeltjes een stuk kouder is, waardoor het mogelijk is om moleculair waterstof te vormen. Dit zorgt voor een kettingreactie waarbij het gas voortdurend kouder wordt en er potentieel sterren gevormd kunnen worden.

Vraag 2.
Binnen de sterrenkunde proberen we de temperatuur van het stof te bepalen afhankelijk van onze keuze voor de emissiecoëfficiënt

$$\kappa_\lambda^{em} = \kappa_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^\beta$$

genormaliseerd op $\lambda_0 = 1$ µm. We onderzoeken dit in een supernovarest waarbij we het interstellaire stralingsveld beschrijven als de som van twee gedempte zwartlichaamstralers:

$$4\pi\, J_\lambda = 8{,}6 \cdot 10^{-14} B_\lambda(8000K) + 6{,}81 \cdot 10^{-13} B_\lambda(3750K)$$

a) Geef de formule die de temperatuur van het stof verbindt aan de helling van de emissiecoëfficiënt β.

We berekenen vooreerst

$$B_\lambda = B_\nu \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| = \frac{2h}{c^2} \frac{(\frac{c}{\lambda})^3}{e^{hc/\lambda kT}-1} \left(\frac{c}{\lambda^2}\right) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

Aangezien we de intensiteit J_λ van het stralingsveld hebben ontbonden in twee zwarte stralers, herleiden zowel de vergelijking voor J^{em} (emissie) als voor J^{abs} (aborptie) zich tot het berekenen van een integraal van de volgende vorm:

$$\int_0^\infty \kappa_\lambda\, B_\lambda d\lambda \qquad (1)$$

Om deze integraal uit te rekenen voor beide gevallen, merken we op dat de absorptiecoëfficiënt voor dit probleem algemeen kan geschreven worden als:

$$\kappa_\lambda = \kappa_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^\beta$$

waarbij β = 2 voor de emissie en β = 0 voor de absorptieterm. Uiteraard is het ook mogelijk om de twee integralen afzonderlijk uit te rekenen. De integraal uit vergelijking (1) wordt nu

$$\int_0^\infty \kappa_\lambda\, B_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \kappa_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^\beta \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1} d\lambda = 2hc^2 \kappa_0 \lambda_0^\beta \int_0^\infty \frac{\lambda^{-5-\beta}}{e^{hc/\lambda kT}-1} d\lambda$$

We voeren nu de volgende substitutie $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ door, waaruit volgt dat

$$\lambda = \frac{hc}{xkT}$$

en dus

$$d\lambda = -\frac{hc}{kTx^2} dx$$

Daarmee bekomen we dan

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \kappa_\lambda\, B_\lambda d\lambda &= 2hc^2 \kappa_0 \lambda_0^\beta \left(\frac{hc}{kT}\right)^{-5-\beta} \left(\frac{hc}{kT}\right) (-1) \int_\infty^0 \frac{x^{5+\beta}}{e^x-1} \frac{dx}{x^2} \\ &= 2hc^2 \kappa_0 \lambda_0^\beta \left(\frac{hc}{kT}\right)^{4+\beta} \int_0^\infty \frac{x^{3+\beta}}{e^x-1} dx \end{aligned}$$

We gebruiken nu de gegeven vergelijking

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{e^x-1}$$

De voorwaarde voor thermisch evenwicht ($4\pi\, J^{em} = 4\pi\, J^{abs}$) vertaalt zich naar

$$4\pi\lambda_0^2 \left(\frac{kT}{hc}\right)^6 \zeta(4+\beta)\Gamma(4+\beta)$$
$$= \left(\frac{k}{hc}\right)^4 \zeta(4)\Gamma(4)(8{,}6 \cdot 10^{-14}(8000K)^4 + 6{,}81 \cdot 10^{-13}(3750K)^4)$$

Hieruit volgt voor de temperatuur

$$T^6 = h^2c^2 \frac{\zeta(4)\Gamma(4)\left(8{,}6\cdot 10^{-14}(8000K)^4 + 6{,}81\cdot 10^{-13}(3750K)^4\right)}{4\pi\lambda_0^2 k^2\, \zeta(4+\beta)\Gamma(4+\beta)}$$
$$= 8 \cdot 10^9 \cdot \frac{\zeta(4)\Gamma(4)}{\zeta(4+\beta)\Gamma(4+\beta)}$$

zodat

$$T = 45 \cdot \sqrt[6]{\frac{\zeta(4)\Gamma(4)}{\zeta(4+\beta)\Gamma(4+\beta)}}$$

b) Geef de temperatuur van het stof voor β = 2.

Voor β = 2 vinden we

$$T = 45 \cdot \sqrt[6]{\frac{\zeta(4)\Gamma(4)}{\zeta(6)\Gamma(6)}}\,K = 45 \cdot \sqrt[6]{\frac{\frac{\pi^4}{90}\times(4-1)!}{\frac{\pi^6}{945}\times(6-1)!}}\,K = 45 \cdot \sqrt[6]{\frac{\frac{\pi^4}{15}}{\frac{8\pi^6}{63}}}\,K = 45 \cdot \sqrt[6]{\frac{63}{120\cdot\pi^2}}\,K$$

zodat

$$T \approx 27{,}6\,K$$

Vraag 3.
Supernova's zijn belangrijke bronnen voor de formatie van stof, maar er zijn meerdere bronnen. Geef twee andere bronnen voor de formatie van stof. Leg bij iedere bron uit hoe het stof van de bron de ruimte in wordt gelanceerd.

Stof zelf wordt gevormd binnen sterren, waarbij de massa van de ster mogelijke invloed heeft op het soort stof dat wordt gevormd. Sterren van meer dan 8 keer de zonsmassa evolueren eigenlijk te snel om effectieve stofdeeltjes te vormen. De stofdeeltjes die uiteindelijk gevormd worden, zijn voornamelijk gemaakt van ijzer, magnesium en silicium, gemengd met zuurstofatomen. Deze stofdeeltjes zullen tijdens de supernova-explosie aan de ster ontsnappen, waarbij mogelijk een deel van het stof wordt vernietigd. Sterren met een massa lager dan 8 keer de zonsmassa vormen ook stofdeeltjes gemaakt van ijzer, maar doordat ze langer leven, is het ook mogelijk om van het koolstof stofdeeltjes te maken. Deze stofdeeltjes zullen dan tijdens de asymptotische reuzentak fase gevangen zitten in de convectiestromen binnen de ster en ontsnappen wanneer deze stromen de buitenste laag van de ster bereiken en sterrenwinden veroorzaken. Dit gebeurt voornamelijk bij het derde dredge-up.

Dit is het einde van de eerste ronde van
de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2024.